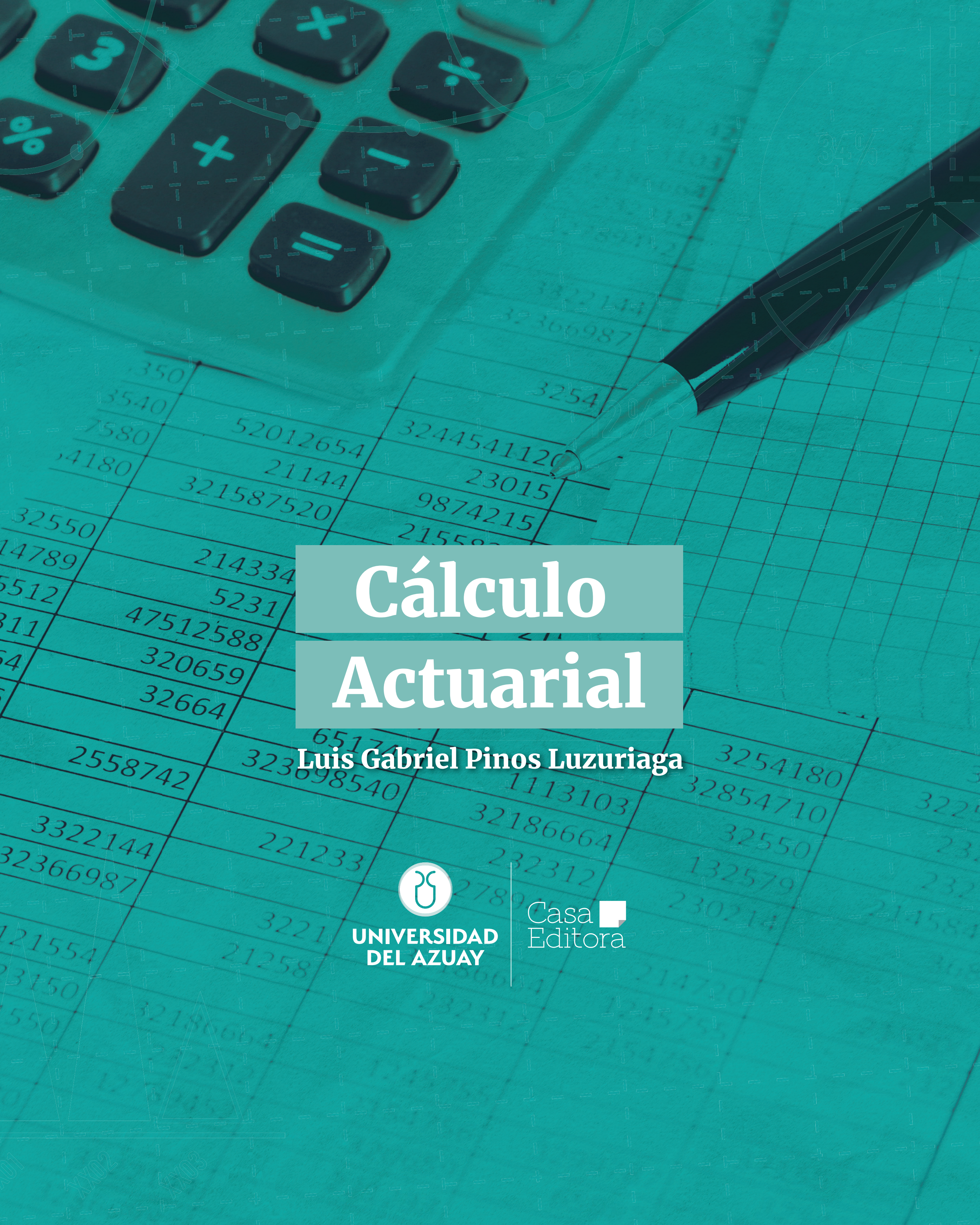


Cálculo Actuarial

Luis Gabriel Pinos Luzuriaga

UNIVERSIDAD DEL AZUAY
Casa Editora


XX01
XX02
XX03

Francisco Salgado Arteaga
RECTOR

Martha Cobos Cali
VICERRECTORA ACADÉMICA

Jacinto Guillén García
VICERRECTOR DE INVESTIGACIONES

Toa Tripaldi Proaño
DIRECTORA DE COMUNICACIÓN Y PUBLICACIONES

Luis Gabriel Pinos Luzuriaga
AUTOR

Verónica Neira
Nancy Negrete
CORRECCIÓN DE ESTILO

Santiago Neira Ruiz
Departamento de Comunicación y Publicaciones
DIAGRAMACIÓN Y DISEÑO DE PORTADA

e-ISBN: 978-9942-847-00-3

Cuenca - Ecuador
Febrero de 2021

Contenido

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Índice de tablas

Índice de figuras

Agradecimientos

El autor agradece ante todo a Dios por la oportunidad de culminar esta obra, a las autoridades de la universidad del Azuay, en especial al Ingeniero Jacinto Guillen Vicerrector de Investigaciones, al Señor Decano de la Facultad de Ciencias de la Administración el Ingeniero Oswaldo Merchán, y a la Ingeniera Ximena Moscoso, Subdecana de la misma facultad, por su apoyo incondicional en el avance de esta obra.

A todos mis colegas y profesores de la Carrera de Economía de la Universidad del Azuay, en especial a los Economistas Bladimir Proaño, Silvia Mejía y Luis Tonón, con quienes comparto aventuras académicas. A los estudiantes de la carrera de Administración de empresas, Economía y Contabilidad de las universidades del Azuay y Cuenca y en especial a la Economista Érika García quien me apoyó para la finalización del libro.

Mis más sinceros agradecimientos al Economista Carlos Cordero y Fabian Cordero, quienes fueron los revisores del texto, que aportaron en gran manera con sus conocimientos y experiencia en el campo actuarial.

A mis Familiares por su apoyo incondicional en el proceso de redacción del libro.

Econ. Luis Gabriel Pinos Luzuriaga

Presentación

El texto está organizado en 3 partes y 7 capítulos. En la primera parte (Capítulo 0) se presenta un repaso de conceptos básicos de Matemática Financiera y Estadística, que servirán para cálculo actuarial. A través de ejemplos se da un repaso del valor del dinero en el tiempo, costo de capital, conceptos de probabilidades y distribuciones de probabilidad.

La segunda parte (Capítulos del 1 al 6), se refiere al análisis de ejercicios y casos de cálculo actuarial. Los temas a tratar son: decisión de aseguramiento, biometría actuarial, tablas de mortalidad, seguros de vida, rentas vitalicias y tipologías de coberturas que usan las compañías es seguros.

La tercera parte está relacionada a seguros sociales y colectivos, se analizan temas como: previsión social, y los sistemas de pensiones de reparto y capitalización.

El texto está escrito de manera comprensible y con ejemplos desarrollados paso a paso para que puede ser consultado por estudiantes de cálculo actuarial a nivel introductorio.

Capítulo 0

Repaso de los fundamentos financieros y estadísticos

Capítulo 0

Repaso de los fundamentos financieros y estadísticos

Una aplicación básica de las matemáticas actuariales permite modelar la transferencia de dinero, pues, bancos, compañías de seguros, empresas, el IESS, etc., participan en transacciones que implican recibir ciertas sumas de dinero en determinados períodos y pagar otras sumas de dinero en otros períodos. En la parte introductora de este libro, asumiremos que los flujos de efectivo son ciertos (concepto estudiado en matemática financiera); posteriormente, nos enfocaremos en flujos de efectivo probabilísticos como el cálculo de valores actuariales para seguros de vida y rentas vitalicias, para lo cual, se comenzará haciendo un breve repaso de matemática financiera y estadística.

0.1. Interés simple y compuesto

El interés es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo. Blank y Tarquin (2012) definen interés como la manifestación del valor del dinero en el tiempo; desde una perspectiva de cálculo, el interés es la diferencia entre la cantidad final de dinero y la cantidad inicial.

La cantidad del interés depende de las siguientes variables:

CAPITAL: Cantidad de dinero que se da en préstamo (cantidad inicial de dinero).

PLAZO: Tiempo durante el cual se presta el capital.

TASA DE INTERÉS: Cuando el interés que se paga o gana respecto a una unidad de tiempo específica se expresa como porcentaje del capital se llama tasa de interés (Blank y Tarquin, 2012).

Interés simple

Es el beneficio que se obtiene de una inversión, cuando los intereses producidos durante cada período de tiempo que dura dicha inversión se deben, únicamente, al capital inicial, ya que los beneficios o intereses se retiran al vencimiento de cada uno de los períodos; es decir, los intereses no se agregan al capital productivo. Blank y Tarquin (2012) mencionan que el interés simple se calcula solo con el capital, ignorando cualquier interés generado en los períodos de interés precedentes.

Ejemplo

La ley del interés simple, con un capital inicial de $1.000.000 a una tasa del 5% anual, se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. *Cálculo Interés Simple*

Tiempo (n)	Puesto (P)	Interés	Monto (M)
0	1		1.000.000
1	2	50.000	1.050.000
2	3	50.000	1.100.000
3	4	50.000	1.150.000
4	5	50.000	1.200.000

Nota. Los valores de interés y montos se encuentran en dólares.

Monto 3 (M3) = Puesto 4 (P4) = , donde d es la diferencia entre montos: $50.000 (interés), entonces:

M3 = 1'000.000+ ((4 -1) + 50.000) = $1´150.000

Partiendo de ello se tiene:

$$M_n = C_0 + n * d \qquad (0.1)$$

Si reemplazamos a d (interés), por C0 * i quedaría:

$$M_n = C_0 + (n * C_0 * i)$$

Por lo tanto, la capitalización a interés simple es:

$$M_n = C_0 (1 + n * i) \qquad (0.2)$$

La actualización a interés simple será:

$$C_0 = \frac{M_n}{(1 + n * i)} \qquad (0.3)$$

El tiempo “n” será:

$$n = \frac{1}{i}\left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right) \quad (0.4)$$

La tasa de interés será:

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right) \quad (0.5)$$

0.1.1. Interés Compuesto

Representa una acumulación de intereses que ha sido generado en un período determinado por un capital inicial. Por lo tanto, los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran, sino que se reinvierten o se añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan. Es así que, Blank y Tarquin (2012) afirman que el interés compuesto es un interés sobre interés.

Factor de actualización y capitalización

¿Recuerda usted cómo calcular el valor actual de un activo que produce un flujo de caja dentro de 1 año?

$$VA = \frac{F_C}{(1+i)^1} \quad (0.6)$$

En donde:

F_C= Es el flujo de efectivo que se generará en algún momento en el futuro

i= Tasa de interés efectiva o costo de capital

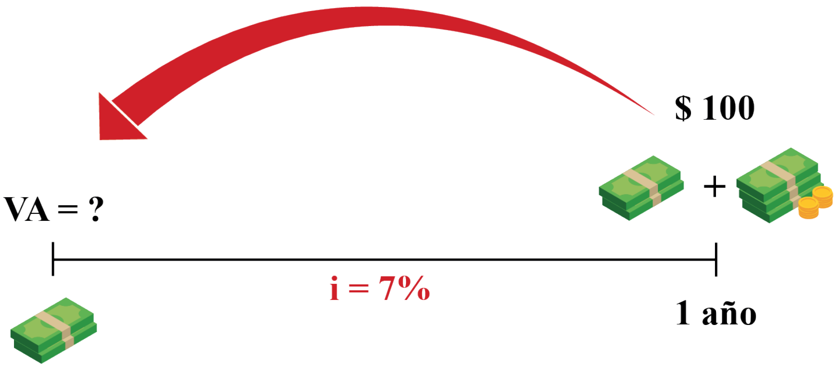
Por tanto, el factor de actualización es:

$$\frac{1}{(1+i)^n} \quad (0.7)$$

Ejemplo

1. Si suponemos que el flujo de caja dentro de un año es cierto y es de \$100, y el costo de capital libre de riesgo es de (7%), entonces, el valor actual del activo es:

Figura 1. Valor Actual

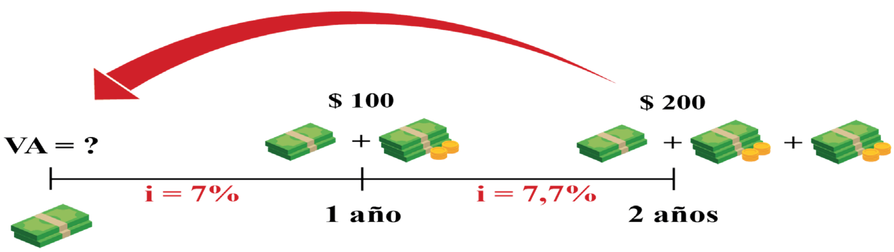


$$VA = \frac{100}{(1 + 7\%)} = \$93{,}46$$

Cuando hay muchos flujos de caja en varios períodos, deberíamos expresarlos en dólares de hoy para poderlos comparar.

2. Un inversor tiene posibilidad de invertir en un proyecto que produce un flujo de caja de \$100 en el primer año y \$200 en el segundo; la tasa de interés en un año es del 7%, y a los dos años es del 7,7%. El valor de hoy de los flujos correspondientes a los años es:

Figura 2. Valor Actual



$$VA = \frac{100}{(1+7\%)} + \frac{200}{(1+7{,}7\%)^2} = \$265{,}88$$

A esta operación la denominaremos flujos de caja actualizados. Si generalizamos:

$$VA = \sum \frac{FC_n}{(1+i)^n}$$

Por lo tanto, el VAN será:

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{FC_n}{(1+i)^n} \qquad (0.8)$$

Donde:

I_0: Inversión inicial (Este valor va con signo negativo porque desde el punto de vista del inversionista constituye una salida de efectivo).

Factor de capitalización

En cambio, se denomina **factor de capitalización** al **valor futuro** de una unidad monetaria y se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{(1+i)^n} \qquad (0.9)$$

Donde:

- i = tasa de interés efectiva
- n = tiempo

Por lo tanto, el valor futuro o monto de un capital cualquiera viene representado por la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{M = C\,(1+i)^n} \qquad (0.10)$$

Donde:

- **M**= Monto o valor futuro
- **C**= Capital o valor actual
- **i**= Tasa de interés efectiva
- **n**= Tiempo

Ejemplo

3. Encontrar el valor futuro de $100 a una tasa de interés efectiva anual de 5% en 6 años:

$$M = \$100(1+5\%)^6 = \$134{,}01$$

4. Una persona deposita hoy una suma de $1.000.000 en una corporación financiera que reconoce una tasa de interés igual a 4% efectiva mensual. ¿Cuál será la cantidad acumulada al cabo de 5 años?

$$M = \$1.000.000(1+4\%)^{60} = \$10{,}519{,}627.41$$

El tiempo a interés compuesto quedaría:

$$n = \left(\frac{1}{Ln(1+i)}\right) * Ln\left(\frac{M}{C}\right) \qquad (0.11)$$

El interés quedaría:

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \qquad (0.12)$$

NOTA: Recordemos que, para calcular el moto o valor actual de una corriente de flujos de efectivo, la tasa de interés tiene que estar expresada en términos efectivos, de acuerdo con el tiempo de cálculo, es decir, si los flujos son anuales, la tasa deberá ser una efectiva anual; si los flujos fueran mensuales, la tasa que se utilizará será una efectiva mensual, etc. (Hasta este punto hemos supuesto que las tasas son efectivas).

0.2. Conversión de tasas

1. De tasa nominal a tasa efectiva

$$i = \frac{j}{m} \qquad (0.13)$$

Donde:

- **j** = tasa nominal.
- **i** = tasa efectiva.
- **m** = número de capitalizaciones al año.

Ejemplo

5. Pasar una tasa del 12% capitalizable mensualmente a una tasa efectiva mensual.

$$i = \frac{12\%}{12} = 1\%$$

Respuesta: la tasa efectiva mensual es del 1%.

2. De tasa efectiva de un período *i* a una tasa efectiva de un período *x*.

En estos casos se utilizan tasas equivalentes.

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \qquad (0.14)$$

Ejemplo

6. Pasar una tasa del 20% capitalizable semestralmente a una tasa efectiva anual.

$$(1+i) = \left(1+\frac{20\%}{2}\right)^2$$

$$i = (1+10\%)^2 - 1$$

$$i = 1.21 - 1$$

$$i = 0.21$$

Respuesta: la tasa efectiva anual es del 21%.

0.3. Capitalización continua

Para una tasa de interés nominal, si la frecuencia de capitalización aumenta, el monto compuesto resultante también aumenta; cuando la frecuencia con la que el interés se capitaliza crece indefinidamente, se habla de que los intereses generan intereses de manera continua. García (2008), define la tasa de interés continuo como aquella cuyo período de capitalización es lo más pequeño posible; en otras palabras, el número de períodos de capitalización durante el tiempo de la operación financiera, crece indefinidamente.

Monto:

$$M = C * e^{i*t} \tag{0.15}$$

Valor actual:

$$C = \frac{M}{e^{i*t}} \tag{0.16}$$

Ejemplo

7. Si una persona depositó $32.000 al 9% capitalizable continuamente, determinar el monto y el interés ganado en dos años y medio.

$$S = 32.000 * e^{9\%*2,5} \qquad S = \$\,40.074,33$$

$$I = 40.074,33 - 32.000 \qquad I = \$\,8.074,33$$

Respuesta: el monto es de $ 40.074,33 y el interés de $ 8.074.33.

8. El Señor XYZ presta a un amigo $70.000 por 9 meses y le cobra una tasa de interés del 15% anual convertible bimestral, al finalizar este plazo deposita el monto obtenido en una cuenta de ahorros que abona el 14,5% compuesto continuamente; determine qué monto acumulará el señor XYZ al cabo de 24 meses.

Primera parte:

Tasa efectiva bimestral

$$\frac{15\%}{6} = 2,5\%\ efectivo\ bimestral$$

$$i = (1 + 2,5\%)^6 - 1$$

$$i = 15,969341821\%\ efectivo\ anual$$

$$M = \$\,70.000 * (1 + 15,969341821\%)^{0,75}$$

$$M = \$\,78.226,77$$

Segunda Parte:

$$M = \$78.226,77 * e^{14,5\%*1,25}$$

$$M = \$\,93.771,60$$

Respuesta: Después de los 24 meses, el señor XYZ tendrá un monto de $ 93.771,60.

9. ¿Qué cantidad habría que invertir ahora a una tasa del 26,5% compuesto continuamente para disponer de $65.000 dentro de 6 meses?

$$C = \frac{65000}{e^{26.5\% * \frac{6}{12}}}$$

$$C = \$\, 56.993,69$$

Respuesta: Se debería invertir $ 56.993,69 para tener $ 65.000 dentro de 6 meses a una tasa del 26,5%.

0.4. Anualidades

Recordemos que la palabra anualidad se utiliza en matemáticas financieras para indicar un sistema de pagos de sumas fijas a intervalos iguales de tiempo (Díaz y Aguilera, 2008). A la palabra anualidad también se la conoce como rentas, series uniformes, pagos periódicos, etc.

Las anualidades se clasifican de acuerdo con el tiempo: en ciertas y contingentes o de acuerdo con la forma como se estipule el pago, como anticipadas y vencidas. Dentro de estas están las inmediatas, diferidas, temporales, diferidas y temporales o de vida entera.

0.4.1. Anualidades vencidas

Se llaman anualidades vencidas porque los pagos se realizan al fin del período de pago o capitalización (Díaz y Aguilera, 2008).

Valor presente (C)

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (0.17)$$

Valor futuro (M)

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \qquad (0.18)$$

Donde:

R= Suma a pagar

0.4.2. Anualidades anticipadas

Se llaman anualidades anticipadas porque los pagos se realizan al inicio del período de pago o capitalización (Díaz y Aguilera, 2008).

Valor presente (C)

$$C = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (0.19)$$

Valor futuro (M)

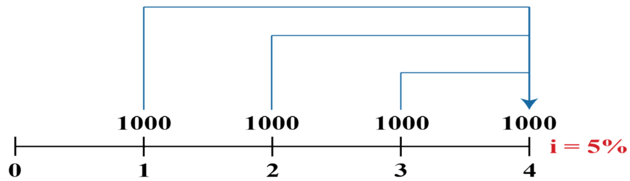
$$M = R(1+i)\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \qquad (0.20)$$

Ejemplo

10. Consideremos una anualidad vencida de $1000 anuales durante 4 años al 5% de interés. Calcular el monto de dicha anualidad.

El monto de dicha anualidad es la suma de los montos compuestos de cada año hasta el término del plazo:

Figura 3. Anualidad Vencida



$$M = 1000(1+5\%)^3 + 1000(1+5\%)^2 + 1000(1+5\%)^1 + 1000$$

$$M = 1157.62 + 1102.5 + 1050 + 1000 = \$4310.12$$

También:

$$M = 1000\frac{(1+5\%)^4 - 1}{5\%} = \$4310.12$$

11. Calcular el monto y valor presente de una anualidad vencida de \$2275 cada 6 meses durante 8 años, 6 meses al 5,4% capitalizable semestralmente.

Como primer paso es importante hacer la conversión de tasas, ya que es una tasa nominal.

$$i = \frac{0.054}{2} = 0.027\ efectivo\ semestral$$

Como las rentas son semestrales, se utilizará la tasa efectiva del 2,7% efectivo semestral.

El monto será:

$$M = 2275\frac{(1+2.7\%)^{17} - 1}{2.7\%} = \$48271.04$$

El valor actual será:

$$C = 2275\frac{1-(1+2.7\%)^{-17}}{2.7\%} = \$30689$$

0.5. Deuda perpetua y rentas perpetuas

0.5.1. Rentas perpetuas constantes

Brealey, Myers y Allen (2015), mencionan que las rentas perpetuas son títulos que el gobierno no tiene obligación alguna en reembolsar, pero, que ofrecen un ingreso fijo cada año a perpetuidad.

El tanto de rentabilidad anual de la deuda es:

Rendimiento:

$$\frac{Flujo\ de\ caja}{Valor\ actual} \qquad (0.21)$$

Valor actual:

$$\frac{Flujo\ de\ caja}{Rendimiento} = \frac{FC}{i} \qquad (0.22)$$

0.5.2. Rentas perpetuas crecientes

Brealey, Myers y Allen (2015) afirman que es muy útil de evaluar una corriente de flujos de efectivo que crezca a una tasa constante, por ejemplo, un 4% por año, en la práctica estos ajustes se lo pueden realizar por ejemplo debido a la inflación.

Valor actual (VA) de una renta perpetua creciente

$$VA = \frac{FC_1}{(i - g)} \qquad (0.23)$$

Donde:

- g = Tasa de crecimiento de los flujos de caja
- FC_1 = Flujo de caja 1
- i = Rendimiento

0.6. Ejercicios propuestos de matemática financiera

1. Un inversionista desea saber el valor actual de un bono emitido por el gobierno británico en donde recibirá una anualidad indefinida de $100.000, si el tipo de interés es del 10%.

2. Utilizando la renta del ejercicio 1 se decide una asignación para cubrir los aumentos salariales que se proyecta que sean del 4% anual. Calcule su valor actual.

3. Indique, cuál es el valor actual de $100 recibidos en el:

- Año 10 a un tanto de actualización del 1%
- Año 10 a un tanto de actualización del 13%
- Año 15 a un tanto de actualización del 25%

4. Una fábrica cuesta $800.000. Se calcula que producirá unos ingresos después de costos de explotación de $170.000 al año indefinidamente. Si el coste de oportunidad de capital es del 14%, ¿Cuál es el valor actual neto de la fábrica?

5. El ganador de un concurso puede elegir entre los siguientes premios:

- $100.000 ahora
- $180.000 dentro de 5 años
- $11.400 al año indefinidamente
- $19.000 al año durante 10 años

Si el tipo de interés es el 12%. ¿Qué premio vale más?

6. ¿Cuántos dólares producen $ 0,507 dentro de 6 años si se invierten al 12%?

7. Si el valor actual de $ 139 es $ 125, ¿cuál es el factor de actualización?

8. Si el coste de capital es 9%, ¿cuál es el valor actual de $ 374 con vencimiento en el año 9?

9. Un proyecto produce un flujo de caja de $432,00 en el primer año, $137,00 en el segundo año, $797,00 en el tercer año, si el coste de capital es el 15%, ¿cuál es el valor actual del proyecto?

10. Una inversión cuesta $1.548,00 y paga una renta perpetua de $138,00, si el tipo de interés es del 9%, ¿cuál es el VAN?

11. Una acción pagará un dividendo de $4 dentro de un año y después se espera que los dividendos aumenten en forma indefinida al 4% anual. Si el tanto de actualización es del 14%, ¿cuál es el valor actual de la corriente de dividendos?

12. El día de hoy Juan compra una anualidad de $2500 anuales durante 15 años, en una compañía de seguros que utiliza el 3% anual; el primer pago vence en un año. ¿Cuál fue el costo de la anualidad?

13. Un inversor está interesado en un proyecto inmobiliario de oficinas y ha recibido malas noticias; el constructor dice que la construcción del edificio tardará dos años en vez de uno y le presenta el siguiente calendario de pagos:

- Un pago de $120.000 en un momento inicial, más el valor del terreno, que cuesta $50.000.
- Un pago aplazado de $100.000 dentro de un año.
- Un pago de $100.000 a la entrega del edificio al final del año 2.
- Dentro de los dos años el edificio podrá venderse en $420.000 (asumiremos que esta cuantía es cierta).
- La tasa de interés es del 5%.

El inversor desea saber si el proyecto es viable.

14. Hallar el valor futuro y presente de una anualidad de $5000 pagadera semestralmente durante 7 años 6 meses, al 8,6% capitalizable semestralmente.

15. Una empresa vende artículos de hogar con una cuota inicial de $100.000 y 16 cuotas mensuales de $50.000, si se carga el 15% con capitalización mensual, hallar el valor de contado.

16. Una compañía deposita al inicio de cada año $20.000 en una cuenta de ahorros que abona el 7% de interés, ¿a cuánto ascenderán los depósitos al cabo de 5 años?

17. Una compañía alquila el terreno en $4000 mensuales y propone al propietario pagar alquiler anual, a principio de cada año, con una tasa del 12% convertible mensualmente. Hallar el valor del alquiler anual.

18. Una persona viaja fuera de su ciudad y deja una propiedad en alquiler por 5 años, con la condición que le paguen por trimestre vencido, el valor de $9000, esta cantidad se depositará en una cuenta de ahorros que paga el 8% capitalizable trimestralmente. Hallar el valor futuro de los 5 años y el valor presente del contrato de alquiler.

19. Dados dos fondos de inversión A y B, las tasas efectivas de interés son 3% y 2,5% respectivamente; al final de 20 años, el total acumulado en los dos fondos es $10.000. En el año 31 el monto acumulado de A es dos veces el de B. Determine el valor final de los dos fondos en conjunto al final del año 10.

20. Un negocio permite a sus clientes pagar con tarjeta de crédito o recibir un descuento r (%) por pagar de contado. Por la venta con tarjeta, el negocio recibe 97% del precio de compra mes y medio después. A una tasa efectiva anual del 22%, los dos pagos son equivalentes. Encuentre r.

Repaso de estadística

Revisión de conceptos estadísticos

0.7. Probabilidades

Para Lind, Marchal y Wathen (2015) existen dos perspectivas para analizar probabilidades: objetiva y subjetiva.

1. **Probabilidad objetiva:** Se divide en clásica y empírica:

La probabilidad clásica parte suponiendo que los resultados de un experimento son igualmente posibles y se calcula:

$$\textbf{\textit{Probabilidad clásica}} = \frac{\textit{Número de resultados favorables}}{\textit{Número total de posibles resultados}}$$

En este caso, los eventos deben ser mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

- **Probabilidad empírica** nos dice que la probabilidad de que un evento ocurra representa una fracción de los eventos similares que ocurrieron en el pasado; este enfoque se basa en la ley de los grandes números.

Los eventos futuros no se pueden predecir con certeza, pero, la frecuencia relativa con la que ocurren en una larga serie de intentos es a veces sorprendentemente estable; este tipo de eventos se denominan eventos aleatorios. Peña (2001) menciona que la probabilidad de un suceso como el valor límite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación.

2. **Probabilidad subjetiva:** Si no se cuenta con información o si la información con la que se cuenta es poca, es posible aproximar la probabilidad de forma subjetiva; el individuo analiza opiniones e información disponibles para asignar una probabilidad de ocurrencia (Lind et al., 2015).

0.8. Conjuntos

Para continuar con el desarrollo de probabilidades necesitamos algunos elementos teóricos de conjuntos.

Usaremos las letras mayúsculas para denotar un conjunto de puntos, si los elementos de un conjunto B son b1, b2 y b3 se escribe:

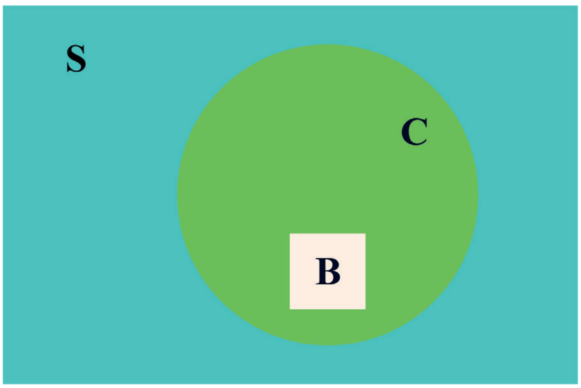
$$\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Si S es el conjunto de todos los elementos en consideración, se dice que S es el conjunto universal (Wackerly, Mendenhall y Scheaffer, 2010).

Para dos conjuntos cualquiera B y C, diremos que B es un subconjunto de C, o B está contenido en C ((B ⊂ C), si todo punto B está en C, el conjunto nulo o vacío denotado por ∅ , es el conjunto que no contiene puntos, entonces ∅ es un subconjunto de todo conjunto (Wackerly et al., 2010).

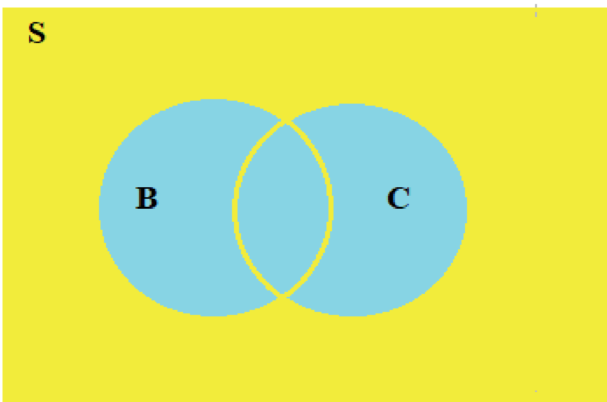
Los conjuntos se pueden representar mediante diagramas de Venn, el siguiente diagrama (gráfico 4) muestra dos conjuntos B y C del conjunto universal S, el conjunto B es el conjunto de todos los puntos dentro del cuadrado, el conjunto C es el conjunto de todos los puntos dentro del círculo, se puede observar que B ⊂ C.

Figura 4. Diagrama de Venn para B ⊂ C



Considere dos conjuntos arbitrarios, la unión de B y C (B ∪ C), es el conjunto de todos los puntos en B o en C o en ambos; es decir, la unión de B y C contiene todos los puntos que están en al menos uno de los conjuntos. En el siguiente diagrama de Venn (Figura 5) se observa BC:

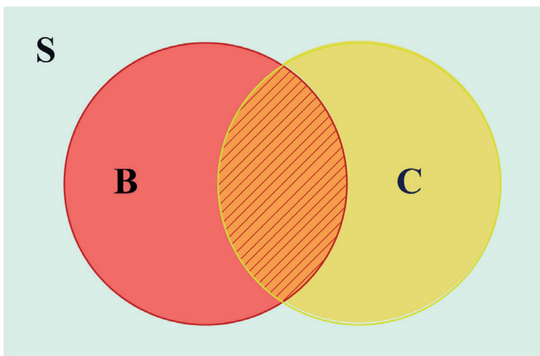
Figura 5. Diagrama de Venn para B ∪ C



El área compuesta por los dos círculos representa B ∪ C, está formada por los puntos de cualquiera de los dos círculos o de ambos. Como se puede observar la palabra clave es “o”: B o C o ambos.

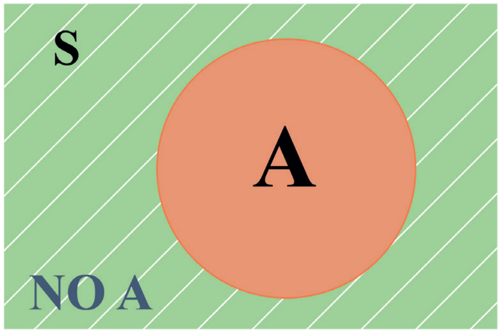
La intersección de B y C (B ∩ C) es el conjunto de todos los puntos en B y C simultáneamente. Aquí la palabra clave es “y”. A continuación, se muestra la intersección mediante el diagrama de Venn:

Figura 6. Diagrama de Venn para B ∩ C



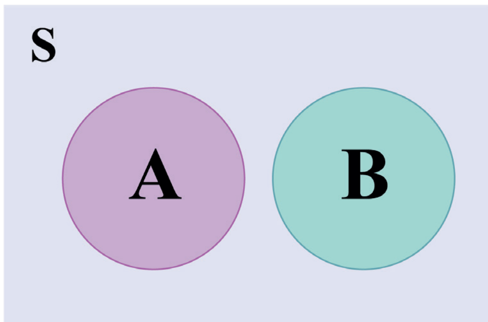
Si A es subconjunto de S, entonces, el complemento de A ($\bar{A}$ = no A), es el conjunto de puntos que están en S, pero, no en A. ($A \cup \bar{A} = S$).

Figura 7. Diagrama de Venn para No A



Se dice que dos conjuntos son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$; es decir, los conjuntos no tienen puntos en común, como se ve a continuación:

Figura 8. Diagrama de Venn para conjuntos mutuamente excluyentes



A continuación, mostramos algunas propiedades de conjuntos:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Y las leyes de Morgan

- $(A \cap B) = A \cup B$
- $(A \cup B) = A \cap B$

Experimento

Wackerly et al. (2010) definen 'experimento' como un proceso por el cual se hace una observación, por lo que, al realizar un experimento, puede terminar en uno o más resultados (eventos); a los eventos los representaremos con letra mayúscula, por ejemplo, al lanzar un dado (experimento), se puede observar los siguientes eventos:

A: Observar número impar

B: Observar número menor a 5

E1: Observar un 1

E2: Observar un 2

E3: Observar un 3

E4: Observar un 4

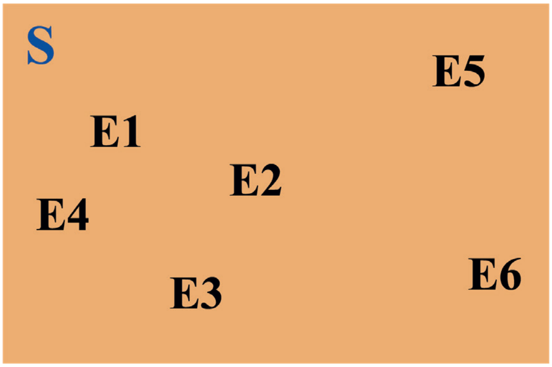
E5: Observar un 5

E6: Observar un 6

Si observó un evento A, al mismo tiempo habrá observado un E1, E3, E5. Así el evento A se puede descomponer en tres eventos, por lo que se denomina **evento compuesto.**

Un evento simple no se puede descomponer; cada evento simple responde a un punto muestral. El espacio muestral asociado con un experimento es el conjunto formado por todos los posibles puntos muestrales. Un espacio muestral es dado por S.

Figura 9. Espacio muestral



$\boldsymbol{S} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$

Si el conjunto S está formado por un número finito de puntos (**espacios muestrales discretos**), en nuestro caso, al lanzar un dado hay seis puntos muestrales.

Al realizar un experimento una vez, se observará un solo evento simple. Por ejemplo, si se lanzara un dado y si se observa un 1, no se observará al mismo tiempo otro número, tenemos un punto muestral simple E1. El punto muestral simple E2, asociado con observar un 2, por lo que los conjuntos son mutuamente excluyentes.

Ejemplo

12. Ahora veremos los eventos compuestos con un experimento con espacio muestral discreto con un ejemplo:

El evento A de lanzar un dado (observación de número impar) ocurrirá si y solo si ocurre E1, E3, E5, por lo tanto:

$\boldsymbol{A} = \{E_1, E_3, E_5\} = E_1 U E_3 U E_5$

De la misma manera B (observación menor a 5)

$B = \{E_1, E_2, E_{3,} E_{4,}\} = E_1 U E_2 U E_2 U E_4$

Axiomas:

Axioma 1

$$P(A) \geq 0$$

$$P(A) = P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) = 0{,}5$$

Axioma 2:

$$P(S) = 1$$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$$

0.8. Reglas para calcular probabilidades

Ley aditiva de probabilidad

- **Regla especial de la adición:** Los eventos deben ser mutuamente excluyentes (Lind et al., 2015); como, por ejemplo, en un lanzamiento de dado son los eventos un "número 4 o mayor" y un número "2 o menor" y el resultado cae en el primer grupo, entonces, no puede estar en el segundo grupo, por lo tanto:

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces P(A∩B)=0, por lo tanto, quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A \text{ } o \text{ } B) = P(A) + P(B)$$

- **Regla general de la adición:** Los resultados de cualquier experimento pueden no ser mutuamente excluyentes (Lind et al., 2015).

La probabilidad de unión de dos elementos A y B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \text{ } o \text{ } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ } y \text{ } B)$$

Ley multiplicativa de probabilidad

- **Regla especial de la multiplicación:** Se requiere que dos eventos A y B sean independientes (Lind et al., 2015), es decir, si el hecho de que ocurra uno no altera la probabilidad de que otro suceda.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A\ y\ B) = P(A)P(B)$$

- **Regla general de la multiplicación:** Se requiere que dos eventos A y B sean dependientes. Es decir, si el hecho de que ocurra uno altera la probabilidad de que otro suceda, en este punto entramos en un concepto de probabilidad condicional, que es la probabilidad de que un evento en particular ocurra dado que otro evento ya ocurrió (Lind et al., 2015).

La probabilidad de un evento depende de si sabemos que ha ocurrido otro evento.

La probabilidad condicional de un evento es la probabilidad (frecuencia relativa de ocurrencia) del evento, dado el hecho de que uno o más elementos ya ocurrieron.

Por lo tanto, la probabilidad de un evento A dado que un evento B ya ha ocurrido es igual a:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

$$P(A\ y\ B) = P(A)P(B/A)$$

Siempre que P(B) > 0, recordemos que se lee la probabilidad de A dado B.

Por lo tanto, siguiendo con la regla general de la multiplicación tendremos:

La probabilidad de la intersección de dos eventos A y B es:

$$P(A\ /\ B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\ y\ B)}{P(B)}$$

0.9. Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

Antes de enmarcarnos en el estudio de las distribuciones de probabilidad, es necesario conocer qué es una variable aleatoria.

Vamos a presentar una observación de algún aspecto de la economía, finanzas, demografía, como la realización de un experimento aleatorio. A los resultados del experimento se les asigna valores numéricos únicos; la asignación es de uno a uno, y cada realización obtiene un valor y ningún par de realizaciones distintas reciben el mismo valor, la variable de realización Y es la variable aleatoria, porque hasta que el experimento no se lleve a cabo, el valor de Y es incierto. Las probabilidades se asocian con las realizaciones para cuantificar la incertidumbre (Greene, 1998). En otras palabras, Lind et al. (2015) refieren que una variable aleatoria es la cantidad que resulta de un experimento que, por azar, puede adoptar diferentes valores.

Con el antecedente dado anteriormente, definiremos a la distribución de probabilidad como una lista de todos los resultados de un experimento asociado con sus respectivas probabilidades de ocurrencia; la probabilidad de un evento en particular está entre 0 y 1. Los resultados son eventos mutuamente excluyentes; la suma de todas las probabilidades de los diversos eventos es 1 (Lind et al., 2015).

0.9.1. Variable aleatoria discreta

Se dice que Y es una variable aleatoria discreta si puede tomar un número finito o contablemente finito de valores distintos.

¿Por qué estudiar probabilidad? Se necesita la probabilidad de un evento observado para hacer inferencias a cerca de la población. Hay veces que ciertos tipos de variables aleatorias se presentan mucho en la práctica, por tanto, es útil tener a la mano la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria. Esto se conoce como distribución o función de probabilidades de la variable aleatoria discreta.

Función de probabilidad

Un procedimiento que siguen los textos de estadística para definir una variable aleatoria discreta, indicando sus valores posibles (espacio muestral) y sus probabilidades respectivas. Llamaremos función de probabilidad p (y), a la función que indica las probabilidades de cada posible valor.

De manera general, usaremos la letra mayúscula "Y" para significar la variable aleatoria discreta y la letra minúscula "y" para representar un valor en concreto que puede tomar la variable aleatoria.

Por ejemplo:

Usemos Y, como los seis posibles resultados de un lanzamiento de dado; después de tirar el dado, el número observado es y, observe que, "Y" es una variable aleatoria, pero, "y" no es aleatoria.

La expresión (Y=y) es el conjunto de todos los puntos en S a los que la variable aleatoria Y asigna el valor de y.

Ahora introduciremos otra nomenclatura: P(Y=y) que es la probabilidad de que, Y tome un valor de y, por lo tanto:

La P(Y=y) se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en S a los que asigna el valor de y. A veces se usa P(Y=y) como P(y).

En donde P(y) es una función que asigna probabilidades a cada valor de y de la variable aleatoria Y, y recibe el nombre de función de probabilidad para Y.

Como regla:

Para cualquier distribución de probabilidad discreta:

$0 \leq p(y) \leq 1$ Para toda y

$$\sum_{y} p(y) = 1$$

La función de distribución de una variable aleatoria Y, representada por F (Y), es tal que para .

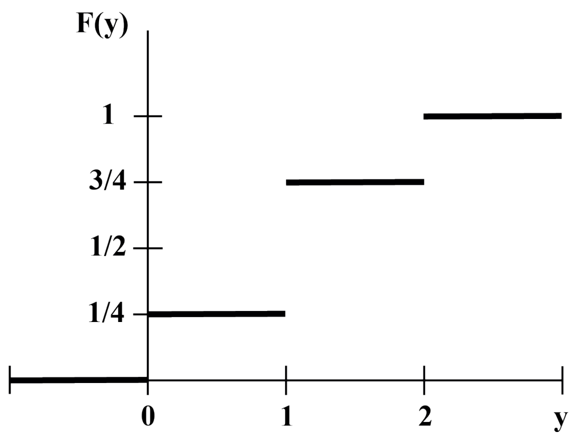
La naturaleza de la función determina si es una variable aleatoria discreta o continua. Comenzaremos analizando la función de distribución para una variable aleatoria discreta y seguiremos con la continua.

Supongamos una distribución binomial:

Tabla 2. Distribución binomial

Y	P(y)
0	0,25
1	0,5
2	0,25

Figura 10 . Distribución binomial



Nota. Adaptado de Estadística Matemática con Aplicaciones (p. 159), por D. Wackerly, W. Mendenhall y R. Scheaffer (2010), *Cengage Learning*.

¿Cuál es F (-2)? P(Y≤-2), como los únicos valores de Y a los que se les asigna probabilidades son 0,1, y 2, ninguno de estos valores es menores o iguales a -2, por tanto, F (-2) = P(Y≤-2), si usamos la misma lógica, F(Y)=0 para Y<0.

¿Cuál es el valor de F (1,5)= P (0)+P (1) ya que estos son los únicos valores que están por debajo o igual de 1,5?; es decir:

$$F(1{,}5) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0{,}75$$

Generalizando:

$$F(y) = P(Y \leq y)\begin{cases} 0\ para\ Y < 0 \\ 0{,}25\ para\ 0 \leq Y < 1 \\ 0{,}75\ para\ 1 \leq Y < 2 \\ 1\ para\ Y \leq 2 \end{cases}$$

Como se observa en el gráfico anterior, este tipo de funciones son escalón, las funciones de distribución para variables aleatorias discretas son escalón.

Desde el punto de vista práctico es evidente que:

$$F(-\propto) = \lim_{y-- -\propto} F(y) = 0$$

$$F(+\propto) = \lim_{y-- +\propto} F(y) = 1$$

F(y)es una función no decreciente de y:Si tenemos dos valores Y_1,Y_2, tal que Y_1,< Y_2 entonces F(Y_1)≤ F(Y_2).

Valor esperado de una variable aleatoria o una función de una variable aleatoria

Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad P (y), entonces, el valor esperado de Y E (Y) será:

$$E(Y) = \sum\nolimits_{Y} Y * P(y)$$

Si P (y) es una caracterización precisa de una distribución de frecuencia poblacional, entonces, , que es la media poblacional.

La varianza, de una variable aleatoria discreta, será el valor esperado de$(Y\text{-}\mu)^2$: $E(Y\text{-}\mu)^2$

Ejemplo

13. Calcular la media o valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

Tabla 3. Varianza y desviación estándar

Y	P(y)
0	0,13
1	0,25
2	0,375
3	0,25

- **Valor esperado=** $E(Y) = \mu = \sum_{y=0}^{3} yPy$

$$E(Y) = 0 * 0{,}13 + 1 * 0{,}25 + 2 * 0{,}375 + 3 * 0{,}25 = 1{,}75$$

- **Varianza** $\sigma^2 = E(Y-\mu)^2 = \sum_{y=0}^{3}(Y-\mu)^2 p(y)$

$$\sigma^2 = (0-1{,}75)^2 * 0{,}13 + (1-1{,}75)^2 * 0{,}25 + (2-1{,}75)^2 * 0{,}375 + (3-1{,}75)^2 * 0{,}25 = 0{,}9375$$

- **Desviación estándar**

$$\sigma = \sqrt{0{,}9375} = 0{,}97$$

Wackerly et al. (2010), amplían el análisis a tres teoremas que servirán para calcular el valor esperado y la varianza de distribuciones más complicadas:

Teorema 1:

La media o valor esperado de una cantidad no aleatoria c es c.

$$E(c) = c$$

Demostración:

$$E(c) = \sum_y c * p(y)$$

$$= c \sum_y p(y)$$

Como:

$$\sum_y p(y) = 1$$

Entonces:

$$E(c) = c$$

Teorema 2:

El valor esperado del producto de una constante c por una función de una variable aleatoria es igual a la constante c que multiplica al valor esperado de la función de la variable.

$$E([c\ g(y)]) = c\ E[g(y)]$$

Teorema 3:

El valor esperado de la suma de sus funciones de una variable aleatoria Y es igual a la suma de sus respectivos valores esperados.

$$E[g_1(y) + g_2(Y) + g_3(y) + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots]$$
$$= E[g_1(y)] + E[g_2(y)] + E[g_3(y)] + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots E[g_k(y)]$$

Utilizando los tres teoremas antes citados, desarrollaremos un teorema para encontrar la varianza de una variable aleatoria discreta:

$$\sigma^2 = E(Y - \mu)^2 = E(Y^2 - 2Y\mu + \mu^2)$$

Aplicando el teorema 3:

$$= E(Y^2) - E(2Y\mu) + E(\mu^2)$$

Si μ es una constante y se aplican los teoremas 1 y 2 a los términos segundo y tercero, respectivamente tenemos:

$$\sigma^2 = E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2$$

Como μ=E(Y) quedará:

$$\sigma^2 = E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(Y^2) - \mu^2$$

Quedando la varianza:

$$\sigma^2 = \ E(Y^2) - \mu^2$$

Utilizando el ejemplo anterior la varianza será:

$$= \ E(Y^2) = \sum_{y} y^2 P(Y) = 0^2 * 0{,}13 + 1^2 * 0{,}25 + 2^2 * 0{,}375 + 3^2 * 0{,}25 = 4$$

Por tanto: 4 * (1,75)2 = 0,95287

Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos de una variable aleatoria Y evaluada en t, se define como:

$$M_y(t) = E[e^{yt}] = \sum e^{yt} f(y)$$

La función generadora de momentos es única; es decir, si dos variables aleatorias tienen la misma función generadora de momentos, se dice que tienen una misma distribución. La función generadora de momentos identifica, de manera única, la distribución de probabilidad.

Si evaluamos:

$$M'_y(t)\ cuando\ t = 0$$

Es decir:

$$M'_y(t) = \frac{d}{dt} M_y(t) \Big| t = 0$$

Quiere decir: Derivando con respecto a t M_x (t), de , evaluada en t = 0.

Si derivo una vez:

$$M'_y(0) = E[x]$$

Si derivo dos veces:

$$M''_y(0) = E[x^2]$$

Si derivo tres veces:

$$M'''_y(0) = E[x^3]$$

0.9.2. Variable aleatoria continua

Wackerly et al., (2010) definen a una variable a aleatoria continua como la variable aleatoria que puede tomar cualquier valor en un intervalo. Consideremos la lluvia diaria en la ciudad de Cuenca. Con un equipo de medición de precisión perfecta, la cantidad de lluvia podría tomar cualquier valor en 0 y 5 pulgadas, por lo tanto, nos encontramos con un número incontable e infinito de puntos en el intervalo entre 0 y 5.

A diferencia de una variable aleatoria discreta, en una variable continua es matemáticamente imposible asignar probabilidades a cada valor dentro de un intervalo, por lo tanto, es necesario otro procedimiento. En este caso, no es posible conocer el valor exacto de una variable aleatoria continua, ya que medir su valor consiste en clasificarlo dentro de un intervalo (Peña, 2001).

Función de densidad f(x)

Si observamos un conjunto de datos mediante un histograma y tomando cada vez más observaciones y construyendo clases cada vez más finas, el histograma tenderá a una curva suavizada que describirá el comportamiento, a largo plazo, de la variable estudiada (Peña, 2001). La función de densidad tiene las siguientes condiciones:

$$f(x) \geq 0;$$

$$\int_{-\propto}^{\propto} f(x)dx = 1$$

Al final, es la curva límite que obtendríamos en el histograma de la población, disminuyendo indefinidamente las anchuras de cada clase. Pero, la pregunta es: ¿Para qué sirve?

El conocimiento de f(x), sirve para calcular la probabilidad por integración. Por ejemplo, la probabilidad de que la variable aleatoria x sea menor que x1, corresponde a sumar las probabilidades de todas las clases, que contienen valores menores o iguales a x1; por lo tanto, el resultado de este pedido se obtiene calculando el área bajo la función de densidad hasta x1.

$$p(x \leq x1) = \int_{-\infty}^{x1} f(x)dx$$

Análogamente, la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores entre x1 y x2:

$$p(x1 \leq x \leq x2) = \int_{x1}^{x2} f(x)dx$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un modelo de variable aleatoria continua asigne un valor exacto es cero. Y la probabilidad de cualquier intervalo por pequeño que sea, vendrá dada por el área que f(x) encierra en ese intervalo. Si la base (Δx) es suficientemente pequeña, dicha área se aproxima por el área de un rectángulo de altura f(x1), siendo x1 el centro del intervalo de longitud Δx:

$$P\left(x1 - \frac{\Delta x}{2} < x \leq x1 + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx f(x1)\Delta x(base\ x\ altura)$$

Una implicación de lo anterior en variables continuas, es:

$$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b)$$

Cuando nos piden encontrar la probabilidad de que *Y* caiga en un intervalo específico, esto es P(a≤Y≤b), si a<b entonces:

$$P(a \leq Y \leq b) = P(Y \leq b) - P(Y \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)dy$$

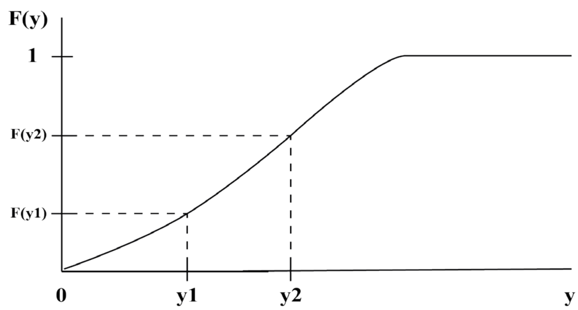
Ejemplo

Sea el daño consiguiente, en términos financieros por incendio en una nave industrial. Si X=0, indica la ausencia de daño, y X=xmax significa la pérdida total del edificio, cuyo valor es xmax; por lo tanto, el intervalo (0-xmax) es el conjunto de posibles resultados.

La función de distribución de una variable aleatoria continua:

Una variable aleatoria Y con función de distribución F (Y), se dice que es continua si F (Y) es continua para -α<y<+α

Figura 11. Distribución variable aleatoria continua



Nota. Adaptado de Estadística Matemática con Aplicaciones (p. 160), por D. Wackerly, W. Mendenhall y R. Scheaffer (2010), *Cengage Learning*.

Si y es una variable aleatoria continua, entonces, para cualquier número real y, P (Y = y) = 0

Si esto no fuera cierto, P(Y=y_0)=P_0>0, entonces, F (Y) tendría discontinuidad (salto). En términos concretos, considere la probabilidad de que veamos una medida de lluvia diaria de

2,1343 pulgadas, el hecho improbable de que veamos un valor exacto de 2,1343 pulgadas, pero, sí podemos ver muchos días entre 2 y 3 pulgadas.

Sea F (y) la función de distribución de una variable continua Y, entonces f (y) viene dada por:

$$f(y) = \frac{dF(Y)}{dy} = F'(y)$$

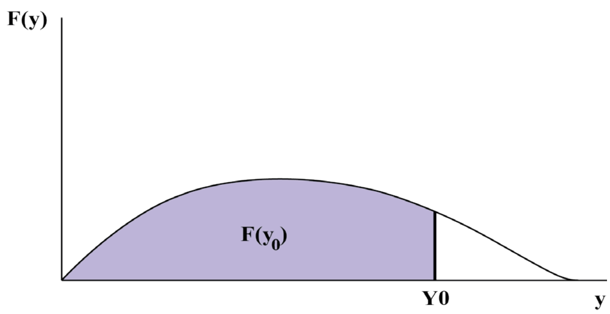
Donde, f(y) es la función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria Y.

Por lo tanto:

$$F(Y) = \int_{-\alpha}^{y} f(t)dt$$

La relación entre la función de densidad y de distribución se visualiza en el siguiente gráfico:

Figura 12. Función de densidad y distribución



Nota. Adaptado de Estadística Matemática con Aplicaciones (p. 161), por D. Wackerly, W. Mendenhall y R. Scheaffer (2010), *Cengage Learning*.

Media o valor esperado de una variable aleatoria continua

El valor esperado de una variable aleatoria continua es:

$$E(Y) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} yf(y)dy$$

La cantidad f(y)dy corresponde a P (y) de la variable aleatoria discreta y la integral evoluciona de la suma y es análoga.

Siguiendo el mismo criterio que una variable aleatoria discreta, la varianza de una variable aleatoria continua es igual a:

$$\sigma^2 = E(Y)^2 - \mu^2$$

NOTA: Si la variable aleatoria es continua, la probabilidad de que esta tome exactamente un valor de x es 0. Esto se expresaría así:

$$p(x = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor particular es 0, la razón es que no hay área bajo la curva y solo se podrá calcular probabilidades sobre intervalos.

0.10. Ejercicios propuestos

21. Supongamos que una familia tiene dos hijos de edades diferentes y estamos interesados en el género de estos niños. Usaremos F si es mujer y M si es hombre, y designe con un par, por ejemplo, F, M si el hijo de más edad es niña y el más joven es niño. Hay cuatro puntos en el conjunto S de posibles observaciones:

S = (F,F F,M M,F M,M). Designe A al subconjunto de posibilidades que no tenga hombres, B al subconjunto de posibilidades que contenga 2 hombres, C, al subconjunto que contenga al menos un hombre. Indique los elementos de A, B, C, A∩B, AUB, A∩C, AUC, B∩C, BUC, C∩.

22. De un total de 60 estudiantes que asisten a la universidad, 9 viven fuera del campus, 36 son pasantes y 3 son pasantes y viven fuera del campus. Encuentre el número de estudiantes que:

c. Son pasantes y viven fuera o ambos

d. Son pasantes y viven en el campus

e. Graduados que viven en el campus

23. Un gerente de una fábrica de azúcar sabe que la probabilidad de que la funda de azúcar de venta al público pese menos de lo legal es 2,5%, y la probabilidad de que pese más es de 7,5%. ¿Cuál es la probabilidad de que la funda tenga un peso satisfactorio? Demuestre con un diagrama de Venn.

24. Suponga que la probabilidad de que saque un 100 en esta materia es de 25%, la probabilidad de obtener un 75 es un 50%. ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea mayor que 75?

25. La junta directiva de Deltha Seguros cuenta con 8 hombres y 4 mujeres. Un comité de 4 miembros será elegido al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 miembros del comité sean mujeres?
- ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 miembros del comité sean hombres?
- ¿Las probabilidades de los puntos a y b suman 1? Explique su respuesta.

26. A continuación, se presenta el número de llamadas diarias al servicio del 911 durante los últimos 50 días. Hubo 22 días en los que realizaron 2 llamadas de emergencia y 9 días en los que realizaron 9 llamadas:

Número de llamadas	Frecuencia
0	8
1	10
2	22
3	9
4	1
Total	50

Convierta esta información en una distribución de probabilidad.

- ¿Es un ejemplo de distribución de probabilidad discreta o continua?
- ¿Cuál es la media de la cantidad de llamadas de emergencia al día?
- ¿Cuál es la desviación estándar de la cantidad de llamadas diarias?

27. Suponga que X tiene una distribución binomial con n=2 y p=0,5 encuentre F(x).

28. Suponga que: Encuentre la función de densidad para x y grafíquela.

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 0, & para\ x < 0 \\ x, & para\ 0 \leq X \leq 1 \\ 1, & para\ x > 1 \end{Bmatrix}$$

Encuentre la función de densidad para x y grafíquela.

29. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ punto \end{cases}$$

Encuentre F(x) y grafique F(x) y f(x).

30. Dado $f(x) = cx^2$ para $0 \le x \le 2$ y $f(x) = 0$, en cualquier otra parte, encuentre el valor de c para el cual f(x) es una función de densidad válida. Posteriormente, calcular $P(1 \le x \le 2)$ y $P(1 < x < 2)$.

31. Deltha Seguros pretende ofrecer productos de seguros de vida a hombres de 60 años, por internet. La tabla de mortalidad indica que la probabilidad de que un hombre de esa edad sobreviva otro año es de 0.98. Si el seguro se ofrece a 5 hombres de 60 años. ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 sobrevivan el año? ¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, 1 no sobreviva?

Ejercicios de riesgo - rendimiento

32. Un empresario quiere elegir la mejor entre dos inversiones: A y B. A continuación, se presentan los datos del rendimiento bajo diferentes escenarios:

Activo A

Escenario	Rendimiento	Probabilidad
Pesimista	0.13	0.25
Más probable	0.15	0.50
Optimista	0.17	0.25

Activo B

Escenario	Rendimiento	Probabilidad
Pesimista	0.07	0.25
Más probable	0.15	0.50
Optimista	0.23	0.25

Calcular:

- Rendimiento esperado de cada opción.
- Desviación estándar de cada opción.
- Hacer un gráfico de distribución de probabilidad para cada opción.

33. Una empresa está considerando la inversión en dos máquinas, ambas proporcionarán beneficios durante 10 años, y cada una requiere una inversión inicial de $400.000. La gerencia elaboró las siguientes estimaciones de rendimientos con sus respectivas probabilidades de ocurrencia bajo diferentes escenarios:

Máquina 1

Escenario	Rendimiento	Probabilidad
Pesimista	0.20	0.25
Más probable	0.25	0.50
Optimista	0.30	0.25

Máquina 2

Escenario	Rendimiento	Probabilidad
Pesimista	0.15	0.20
Más probable	0.25	0.55
Optimista	0.35	0.25

Se pide:

- El rango de los rendimientos de cada máquina.
- El valor esperado del rendimiento de cada máquina.
- El riesgo que conlleva la inversión en cada máquina, a través de la desviación estándar y el coeficiente de variación.
- ¿Qué máquina conviene comprar?

34. Una empresa quiere lanzar un nuevo producto, para lo cual, tiene dos opciones a emprender. A continuación, se presenta las distribuciones de rendimiento de cada opción en función de diferentes escenarios:

Opción 1

Aceptación de mercado	Rendimiento	Probabilidad
Muy Mala	0.0075	0.05
Mala	0.0125	0.15
Promedio	0.0850	0.60
Buena	0.1475	0.15
Excelente	0.1625	0.05

Opción 2

Aceptación de mercado	Rendimiento	Probabilidad
Muy Mala	0.01	0.05
Mala	0.025	0.15
Promedio	0.08	0.60
Buena	0.135	0.15
Excelente	0.15	0.05

Se pide:

- Un gráfico de la distribución de probabilidades de cada opción.
- Rendimiento esperado de cada opción.
- Calcule el riesgo relativo de cada opción.

Capítulo 1

Introducción a los seguros, teoría de la utilidad y decisión de aseguramiento


XX01
XX02
XX03

Capítulo 1

Introducción a los seguros, teoría de la utilidad y decisión de aseguramiento

Manejo del riesgo

El trabajo de un experto en riesgos es la identificación, medición y control de las contingencias que, en esencia, son aleatorias; esto era tradicional en el seguro de vida y luego pasó a otros ramos de seguros como son los patrimoniales, de salud y asistencia médica. Para cubrir el acontecimiento de dichas contingencias, las empresas y personas debían tener grandes cantidades de dinero en reservas para afrontar los riesgos, pero, aparecieron las compañías de seguros, que asumen estos riesgos a cambio de un pago. Luego, este análisis de riesgos se extendió al campo financiero en donde se trata de identificar, medir, cuantificar y controlar los riesgos de crédito, mercado, liquidez y riesgo operativo, etc.

Por lo tanto, un concepto clave que se va a tratar a lo largo del presente libro es el riesgo. Definiremos al riesgo desde diferentes puntos de vista:

1. Posibilidad que se produzca un hecho generador de pérdidas, que afecte al valor económico de las empresas; dentro de este tipo de riesgos tenemos de crédito, mercado, liquidez, operativo (Superintendencia de Compañías Valores y Seguros, 2020).

2. Desde el punto de vista de inversiones, al riesgo se lo puede definir como la dispersión del rendimiento de una inversión con respecto a un rendimiento esperado, por lo que la medida de riesgo aquí utilizada es la desviación estándar. O es una medida de incertidumbre en torno al rendimiento que generará una inversión y, más específicamente, es el grado de variación de los rendimientos relacionados con un activo específico (Gitman y Zutter, 2012).

3. En el contexto de este libro, es la posibilidad de que algo malo suceda y esta ocurrencia desemboca en una pérdida financiera; por ejemplo, si una persona fallece, estaría privando de ingresos a sus familiares dependientes o a socios de algún negocio. Si una persona se enferma tendrá que desembolsar una cantidad de dinero con lo que afectará su flujo de efectivo; lo mismo puede pasar con pérdidas de bienes patrimoniales como la casa o vehículo. En todo caso, no hay como librarse de esos acontecimientos desastrosos, pero, sí se puede tomar medidas para mitigar esa pérdida, una de esas medidas es el seguro. Por lo tanto, definiremos riesgo como la Probabilidad de ocurrencia de un siniestro, y siniestro es la ocurrencia del riesgo asegurado. Estos conceptos los ampliaremos más detalladamente en los siguientes capítulos (Superintendencia de Compañías Valores y Seguros, 1963)

Analicemos el siguiente ejemplo: Si suponemos que es casi improbable que suceda cierto evento, pero, si ocurre, provocará una pérdida financiera de $100.000 se estima que 1 de cada

100 personas experimentará esa pérdida, entonces, se aseguran 1000 personas, entonces, se debe esperar una pérdida de 10 personas; sobre este supuesto el asegurador cobrará una prima de $1000 a cada una y obtendrá unos ingresos de $1.000.000 que servirá para cubrir la pérdida de los 10 asegurados. Este principio llamado equivalencia financiera- actuarial, veremos más adelante.

1.1. Modelos estocásticos frente a modelos determinísticos

El ejemplo anterior es un modelo determinístico. Si el asegurador sabe exactamente cuánto tendrá que pagar por indemnizaciones, deberá cobrar una cantidad que equipare a estas para mantener un equilibrio financiero. En la realidad, el asegurador no sabe o no puede predecir dichas cantidades con exactitud. Al vender pólizas espera beneficiarse del efecto de la diversificación y puede predecir aproximadamente el # de siniestros su cuantía. A continuación, presentaremos diferentes tipos de modelos de flujos de caja.

1.1.1. Modelos determinísticos

1.1.1.1. Flujos de caja

Una característica de la matemática actuarial es modelar la transferencia de dinero. Las instituciones financieras, compañías de seguros y otras empresas aceptan dinero en ciertos momentos y deberán hacer pagos en otros (Promislow, 2015).

Para construir nuestro modelo, primero fijaremos una unidad de tiempo en años; el tiempo cero será hoy, mientras que, el tiempo n será n unidades de tiempo en el futuro. Seleccionaremos una unidad arbitraria de capital. En esta parte supondremos que los dineros se pagan o reciben en unidades de tiempo enteros; la cantidad de dinero recibido se llama Flujo de Caja (FC), un valor positivo de FC indica que se recibe fondos, mientras que, un valor negativo significa que hay salida de dinero. Se presenta a continuación un vector de flujo de efectivo:

$FC = (FC_0, FC_1, FC_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots FC_N)$,

Donde:

- **n** = Duración final

Supongamos que presta 10 ahora, luego 5. La secuencia de pagos será desde el cuarto al sexto período de 7. El vector flujo de efectivo es:

FC= (-10, -5, 0, 7, 7,7)

Desde el punto de vista del deudor, el flujo será:

-FC = (10, 5, 0,-7,-7,-7)

En esta sección analizaremos métodos para analizar el flujo de efectivo, para lo cual, hay que responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuándo es una transacción que vale la pena emprender?
2. ¿Cuánto se debe pagar para recibir una secuencia de flujos de efectivo?
3. ¿Cómo se comparan las transacciones para decidir cuál es viable?

Para esto hay que valorar considerando el valor del dinero en el tiempo; en todo caso, en la práctica no es posible responder a las preguntas anteriormente mencionadas porque no nos enfrentamos a flujos de efectivo conocidos o determinados.

Otras definiciones de flujos de caja:

Normalmente, el modelo de flujos de caja captura la diferencia entre ingresos y salidas de efectivo. Estos se pueden hacer bajo diferentes ópticas, dependiendo del propósito del análisis.

Definición 1:

Es un vector (T_j,C_j), en donde $T_j>0$, y las cantidades $C_j \in R$, que entran y salen de un individuo, institución y/o sistema. Si $C_j>0$ son ingresos y $C_j<0$ se llaman egresos (Diz, 2013).

Definición 2:

Es un vector aleatorio (T_j,C_j), en donde $T_j>0$, y las cantidades $C_j \in R$, con un número de componentes variables y aleatorios, normalmente. Estos flujos de caja son de proyectos de inversión y flujos de compañías de seguros, en donde su pago está sujeto a probabilidad de ocurrencia de siniestros (Diz, 2013).

1.1.1.2. Algunos modelos de flujos de caja

Bono cupón cero. - Son inversiones de renta fija de corto plazo, con intereses que se pagan al final del contrato (Diz, 2013). En el caso ecuatoriano, pueden ser las pólizas bancarias.

Ejemplo

Una inversión de $1000 a 90 días para recibir $1010.

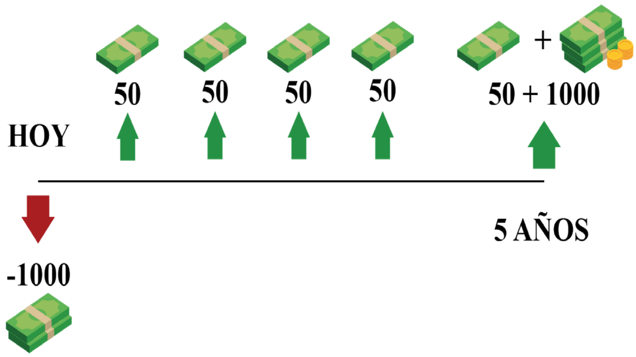
Figura 13. Bono cupón cero

Bonos con cupón. - Son instrumentos de renta fija que, normalmente, son emitidos a largo plazo con pago de intereses periódicamente. Los pagos pueden ser semestrales, anuales, etc. Los pagos de los intereses los determina la tasa cupón y el valor nominal del bono (Besley y Brigham, 2016).

Ejemplo

Un capital de 1000 a 5 años al 5% anual. Normalmente, los bonos son emitidos por gobiernos. Por lo tanto, el gobierno toma el dinero y entrega el bono al inversionista; a su vez, el inversionista adquiere un derecho de cobro periódico de los intereses.

Figura 14. Bonos con cupón



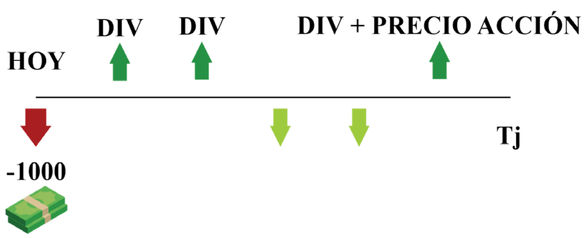
Bonos corporativos. -Son iguales a los que emiten los gobiernos a diferencia que el riesgo es más elevado, por lo que la tasa de interés o rendimiento mínimo requerido por el inversionista es más alta en bonos que en los bonos que emite el gobierno (Diz, 2013).

Acciones. - A diferencia de los anteriores, que son instrumentos de deuda, las inversiones en acciones dan derecho a la propiedad de una empresa, por lo que la ganancia de estos inversionistas está dividida en dos partes:

- Ganancias de capital (cuando sube el precio de la acción).
- Los dividendos de la empresa.

En estos casos, los flujos de caja del inversionista son más volátiles que los anteriores y de cuán rentable sea la empresa (Brealey et al., 2015).

Figura 15. Acciones



Rentas vitalicias. - Funcionan como una anualidad cierta, pero en lugar de tener pagos con regularidad, en la renta vitalicia los pagos terminan al fallecimiento del propietario (Diz, 2013).

En el caso de nuestro país hablamos de pensión por jubilación en el IESS o el pago de una renta vitalicia del empleador al empleado en caso de cumplir 25 años de trabajo en la misma empresa.

Seguros de vida. - La comptañía de seguros paga una suma de dinero al momento de fallecer el asegurado. El pago se realiza a los beneficiarios. Para hacerse acreedor a este beneficio, el asegurado deberá pagar una prima (Diz, 2013).

El valor del seguro (prima única) para una cobertura de 1 año viene dado por:

$$\pi = Suma\ asegurada * v * q_x$$

Donde:

$$v = Valor\ actual\ financiero\ \frac{1}{(1+i)^1}$$

$$q_x = Probabilidad\ de\ fallecimiento$$

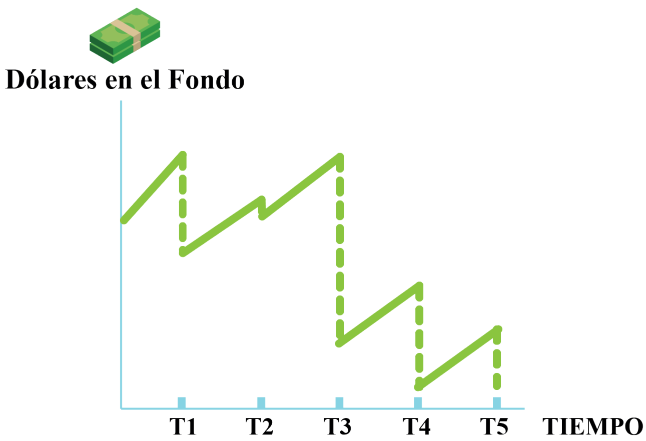
$$x = Edad\ actual\ de\ la\ persona$$

Figura 16. Seguros de vida

NOTA. En el seguro planteado, suponemos que el pago se realiza al fin del año del fallecimiento.

Seguros patrimoniales. - A diferencia del anterior en donde el interés asegurable es la vida de la persona que genera ingresos, en los seguros patrimoniales el interés asegurable es la pérdida patrimonial aleatoria. Hablamos de seguros de vehículos, inmuebles, marítimo, aviación, transporte, etc. Desde el punto de vista del asegurador, los ingresos vía primas se suman a un fondo de riesgos, en donde la historia del número de siniestros con sus respectivas cuantías afecta al valor de la prima de seguros.

Figura 17. Seguros patrimoniales



Proyectos de inversión. - En un horizonte de tiempo, los desembolsos para la realización de proyectos de inversión varían de proyecto a proyecto (Diz, 2013). Supongamos un proyecto inmobiliario, este requerirá de un desembolso inicial para la compra del terreno, luego la realización requerirá de salidas de efectivo; también tendrá ingresos de efectivo por la venta de unidades habitacionales.

1.2. Conceptos básicos y economía del seguro

1.2.1. Importancia

Las operaciones de seguros han sido establecidas con el ánimo de protegerse respecto a contratiempos financieros que puedan suceder aleatoriamente y que forman parte de planes futuros de personas, empresas, etc. Lo que se trata de hacer con el seguro, desde el punto de vista del asegurado, es transformar una pérdida de gran impacto o severidad y/o frecuencia en un gasto fijo conocido llamado prima, que servirá para mitigar la posible pérdida financiera.

Las coberturas con seguros limitan aquellos contratiempos financieros aleatorios, teniendo en cuenta que las operaciones de seguros no reducen la probabilidad de que acontezcan esas pérdidas o sucesos (en términos de seguros, siniestro). Más bien, la operación de seguros proporciona incentivos financieros para lograr una cobertura a las pérdidas; entonces, una operación de seguros es un medio para reducir el impacto financiero adverso (pérdida patrimonial), que impide la realización normal de las actividades futuras.

La justificación económica de una entidad aseguradora es que contribuye a un bienestar general, mejorando expectativas para que los planes futuros no se vean frustrados por pérdidas debidas a sucesos aleatorios imprevistos (siniestros); y, por lo tanto, no causan pérdidas patrimoniales adversas a su tomador y/o asegurado.

Antes de empezar nuestro tema en materia de seguros es importante repasar los siguientes conceptos:

- **Seguro:** Es un contrato mediante el cual, una de las partes, el asegurador se obliga a cambio del pago de una prima, a indemnizar a la otra parte dentro de los límites convenidos de una pérdida o daño producido por un acontecimiento incierto o a pagar un capital o una renta si ocurre la eventualidad prevista en el contrato (Superintendencia de Compañías Valores y Seguros, 1963).

- **Probabilidad:** Es la posibilidad de que ocurra o de que se produzca determinado acontecimiento, que nos sirve para calcular (en teoría de elecciones del consumidor y/o productor en condiciones de incertidumbre) el valor esperado y la variabilidad de posibles resultados. Peña (2001) menciona que el concepto de probabilidad se aplica a los elementos de una población homogénea finita o infinita.

- **Siniestro:** Ocurrencia del riesgo asegurado o concreción del riesgo (Diz, 2013).

- **Prima:** Es el precio del seguro (Diz, 2013).

- **Riesgo:** En la introducción de este capítulo hemos definido riesgo desde diferentes perspectivas; como el enfoque de este libro es seguros, definiremos riesgo como la probabilidad de ocurrencia de un siniestro. La realización de los riesgos no obedece a un patrón determinista, por lo tanto, es imposible prever con exactitud los instantes en que ocurrirán ni los montos de pérdidas económicas que tendrán como consecuencia.

- **Asegurador:** Persona Jurídica legalmente autorizadas, que asume riesgos a cambio de primas, se compromete a resarcir económicamente al asegurado en caso de siniestro (Superintendencia de Compañías, Valores y Seguros, 2020).

- **Asegurado:** Persona natural o jurídica que cede el riesgo a una compañía de seguros (Asegurador) y se compromete a pagar una prima a cambio del resarcimiento económico o reposición de la cosa dañada por siniestro. En caso de resarcimiento por pérdida, esta persona no tiene fin de lucro (Superintendencia de Compañías, Valores y Seguros, 2020).

Dos leyes que se manejan en seguros

- **Ley de los grandes números**

El análisis del riesgo es muy diferente si se lo hace desde el punto de vista del asegurador o del asegurado. La razón es la “ley de los grandes números” que opera en el caso del asegurador, pero, no en el caso del asegurado. Dicha ley dice que mientras más grande sea el número de unidades de riesgo, más seguro es que la experiencia de pérdida efectiva sea igual a la experiencia de la pérdida probable, por lo que, a medida que aumenta el número de unidades expuestas (ya sea personas u objetos), el riesgo disminuye.

El asegurado no puede reducir su riesgo utilizando esta ley, pues, no tiene a su alcance el suficiente número de unidades para reducir el riesgo.

Recordaremos el concepto básico que se revisó en párrafos anteriores: La esperanza matemática, que es la probabilidad de ocurrencia por el efecto esperado.

Si este concepto lo pasamos a los seguros, la esperanza matemática de la pérdida será igual a la frecuencia (probabilidad) multiplicada por la severidad. (Frecuencia * Severidad).

A su vez, la probabilidad viene dada por:

$$P(x) = \frac{\#\ de\ eventos\ favorables}{\#\ de\ eventos\ posibles}$$

Ejemplo

Si tenemos: 10.000 autos y se siniestran 6.000 autos, la probabilidad de siniestro es de 60%. Si el siniestro promedio es el costo total de siniestros dividido para el número de siniestros, si suponemos que el costo de siniestros es de $3.000.000, entonces:

$$\boldsymbol{Costo\ promedio\ de\ siniestros} = \frac{\$3.000.000}{6000} = \$500.$$

Entonces la pérdida será de:

500 * 0,6= $300, esta es la prima de riesgo que se cobrará a los 10.000 asegurados.

La prima tiene que ser:

- Suficiente
- Proporcional al riesgo asumido

Si el promedio de la suma asegurada es $10.000.

Prima = $10.000 * tasa

300 = 10.000 * tasa

Tasa= 0,03. SERÁ LA TASA DE RIESGO.

Un factor que se debe tomar en cuenta es que el riesgo no es estático, siempre se mueve por muchos factores internos y externos. Por este motivo, puede haber una desviación de la frecuencia y la severidad o lo que se llama desviación de la siniestralidad.

A esto se deben sumar otros pagos para cumplir el principio de suficiencia como:

- Comisiones= 20%
- Gastos administrativos= 14%
- Utilidad= 6%
- Factor G (suma de los 3 anteriores) = 40%

Tasa comercial = Tasa de riesgo / 1- g

= 0,03 / 1 - 0,4

= 0,05

Damos un margen de seguridad por desviaciones del 10%

Tasa comercial= tasa de riego (1+margen de seguridad) /1-g

Tc= 5,5% del valor comercial del vehículo.

- **Mutualidad**

La compañía de seguros o seguridad social asume riesgos de un gran número de personas, asumiendo que las cantidades con las que cada una de ellas aporte, vía primas, habrá de contribuir al resarcimiento de los daños o pérdidas colectivas, es decir, es la consecución de una cobertura colectiva y mancomunada frente al riesgo individual de sus asegurados; busca solidaridad ante pérdidas de pocos, de un grupo grande sometido a riesgos.

Su actividad es una operación para acumular riqueza, a través de las aportaciones de muchos sujetos expuestos a eventos económicos desfavorables, para destinar lo así acumulado, a los pocos a quienes se presenta la necesidad. Sigue el principio de mutualidad, buscando la solidaridad entre un grupo sometido a riesgos.

Esta mutualidad se organiza empresarialmente, creando un patrimonio que haga frente a los riesgos. El efecto desfavorable de estos riesgos, considerados en su conjunto, queda aminorado sustancialmente porque, para el asegurador, los riesgos individuales se compensan, solo unos pocos asegurados los sufren, frente a los muchos que contribuyen al pago de la cobertura.

Ello permite una gestión estadística del riesgo, desde el punto de vista económico, aunque se conserve individualmente desde el punto de vista jurídico.

1.3. Tratamiento del riesgo

a. **La asunción del riesgo:** (No aseguramiento), las personas o empresas, muchas veces, asumen directamente sus riesgos. En este punto las personas o empresas destinan un fondo para hacer frente a posibles pérdidas que se puedan dar en el futuro. Esta actitud no es un auto seguro.

b. **La cesión o transferencia del riesgo:** La persona o empresa paga a una aseguradora para que asuma los riesgos de los que el cedente desea liberarse y esta lo acepta a cambio de una prima. Se supone que el tomador de ese riesgo, primero, conoce la probabilidad de pérdida y, por lo tanto, gestiona de mejor manera el cedente de dicho riesgo; y, segundo, tiene la capacidad financiera para hacer frente a las posibles pérdidas.

c. **Eliminación del riesgo:** Normalmente, este punto se da con personas que tienen una gran aversión al riesgo. Estas personas evitan por completo la asunción de riesgos y, por lo tanto, se esperaría que no tuvieron los mismos rendimientos que las personas que se manejan en los puntos anteriores.

1.4. Principio de esperanza matemática de la utilidad

Dado que en ninguna de nuestras actividades podemos prever las consecuencias de nuestras decisiones, sino que, a lo más, podemos ordenar nuestras decisiones con relación a la incertidumbre asociada a nuestras expectativas futuras, se ha elaborado la llamada *Teoría de la utilidad* (Sandoya, 2007).

Entonces, ¿cómo pueden decidirse las inversiones en presencia de flujos de caja aleatorios? Para esto es necesario disponer de una teoría de elección que establezca criterios que permitan tener en cuenta el riesgo-rendimiento; de tal manera, que maximice la utilidad esperada de los recursos.

El problema de la distribución de los recursos disponibles entre consumo e inversión residirá en maximizar la utilidad teniendo en cuenta la esperanza matemática de los recursos y los riesgos asumidos para la obtención de ella, por esto es fundamental usar el criterio de esperanza matemática de la utilidad como criterio de elección en futuros aleatorios y determinar la función de utilidad que permita ordenar eventualidades.

Centramos la atención en las decisiones de los consumidores en general y la utilidad que les reportará la elección entre opciones arriesgadas.

Se supone que todos los decisores toman decisiones racionales, y son capaces de tomar decisiones racionales entre un gran número de alternativas. También los decisores prefieren tener más que menos (No saciedad) y esto es todo lo que se precisa para fundamentar la decisión de esperanza matemática de la utilidad, como criterio de elección en un futuro aleatorio para determinar la función de utilidad del decisor.

Entonces, los decisores tratarán de maximizar la esperanza matemática de la utilidad de sus recursos:

Representamos a la función de utilidad de un ente, como función de sus recursos

$$\max E[U(r)] = \sum_i U(r_i) * p_i$$

Interpretación:

La esperanza matemática de la utilidad es la suma de las utilidades asociadas a distintos resultados posibles ponderadas por sus probabilidades de ocurrencia.

Ejemplo

1. Una persona tiene dos opciones: Trabajar en una empresa recibiendo unos ingresos vía sueldo por $30.000 anuales o emprender un proyecto de inversión, y tiene las siguientes posibilidades de ganancia:

Tabla 4. Distribución de probabilidades del proyecto de inversión

Escenario	Ganancia Esperada	Probabilidad
Auge	50.000	0.25
Estabilidad	35.000	0.50
Recesión	5.000	0.25

¿Cuál es la esperanza de los recursos en la segunda opción?

$$U(r) = 0{,}25 * 50000 + 0{,}50 * 35.000 + 0{,}25 * 5000 = \mathbf{\$32.500}$$

¿Qué alternativa le conviene a la persona?

Se prefiere la segunda opción, pues, la esperanza de los recursos es mayor en $2.500.

2. Analicemos el siguiente caso planteado por Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt (1997):

Tabla 5. Análisis

Caso	Pérdida Posible o Exposición Total	Probabilidad de Pérdida
1	1	0,01
2	1.000	10
3	1´000.000	10.000

Una pérdida de 1 podría ser de poca preocupación para la persona que toma las decisiones, que preferiría correr el riesgo y asumir la pérdida en caso de que aconteciera (propenso al riesgo); sin embargo, la pérdida de 1´000.000 podría ser catastrófica para la empresa. En este caso, el tomador de decisiones podría estar dispuesto a pagar más de la pérdida esperada que es de 10.000, con el fin de obtener el seguro (adverso al riesgo).

Del hecho de que el tomador de decisiones estaría dispuesto a pagar más de la pérdida esperada, concluimos que la teoría de valor esperado es inadecuada para modelar este comportamiento.

1.5. Aversión al riesgo y prima de riesgo

Se presentan tres casos según Sandoya (2007):

1. Cuando la función de utilidad crece menos que proporcionalmente, es cóncava; la utilidad marginal con respecto a los recursos es decreciente $U''(r)<0$ y el decisor es adverso al riesgo.

2. Cuando la función de utilidad crece más que proporcionalmente, es convexa; la utilidad marginal respecto de los recursos es creciente $U''(r)>0$, el decisor es propenso al riesgo.

3. En caso de que la función de utilidad creciera en forma constante, se trataría de una recta, la utilidad crece de manera proporcional. $U''(r)=0$, indiferente.

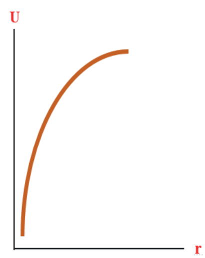
En resumen:

En seguros, cuando la persona o ente recibe más utilidad de la operación hecha con incertidumbre y, por lo tanto, es mayor que la utilidad esperada se dice que el decisor es **adverso al riesgo**; si es menor es **propenso al riesgo** y si es igual es **indiferente.**

1.5.2. Aversión al riesgo

$$Si\ U[E(r)] > E[U(r)]: adverso\ al\ riesgo, la\ cuva\ es\ cóncava.$$

Figura 18. Aversión al riesgo



Características:

- La utilidad esperada que le proporciona no asumir el riesgo **ES MAYOR** que la utilidad que le proporciona asumir.

- La utilidad crece menos que proporcionalmente con respecto a los recursos.

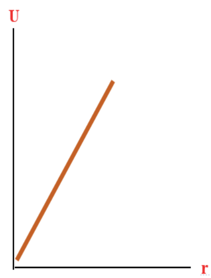
- La curva es cóncava.

- Para un tomador de decisiones, si la utilidad que le proporciona quedarse con la riqueza actual es mayor que la utilidad esperada que le proporciona; por ejemplo, embarcarse en un proyecto, una decisión lógica es quedarse como está y no emprender dicho proyecto.

1.5.2. Neutral al riesgo

$$Si\ U[E(r)] = E[U(r)]$$

Figura 19. Neutral al riesgo



Características:

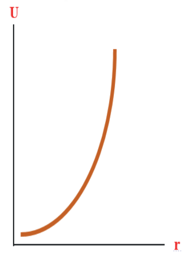
- Es indiferente respecto al riesgo, es decir, la utilidad que le proporciona asumir el riesgo **ES IGUAL** a la utilidad que le proporciona el no asumirlo.

- La utilidad crece de forma constante (La curva es lineal).

1.5.3. Propensión al riesgo

$$Si\ U[E(r)] < E[U(r)]$$

Figura 20. Propensión al riesgo



Características:

- La utilidad esperada que le proporciona asumir el riesgo es menor que la utilidad que le proporciona el no asumir.
- La Utilidad crece más que proporcionalmente con respecto a los recursos.
- La curva es convexa.

Para un tomador de decisiones, si la utilidad que le proporciona quedarse con la riqueza actual es menor que la utilidad esperada que le proporciona, por ejemplo, embarcarse en un proyecto de inversión, una decisión lógica sería emprender dicho proyecto.

NOTA: En general, en participación de operaciones financieras se supone que todos son adversos al riesgo.

1.6. Indemnización (prestación), prima pura y prima con recargo de seguridad.

Consideremos que una persona posee un bien y que corre riesgo de ser destruido en un futuro, asociemos una variable aleatoria al monto de la posible pérdida relativa al bien, con una función de distribución conocida (Sandoya, 2007). Entonces E(ξ), la esperanza matemática de la pérdida esperada en el futuro, se la puede interpretar como la pérdida media a largo plazo, si el experimento de exponer el bien al riesgo pudiera observarse un gran número de veces en las mismas condiciones; es decir, se basa en la ley de los grandes números; suponiendo que no existe desviación de siniestralidad o pérdidas.

Supongamos que el ente asegurador se establece con el fin de colaborar en la reducción de consecuencias financieras por la ocurrencia del riesgo (destrucción del bien). Por lo que el asegurador emite pólizas por las que se compromete a pagar al propietario del bien asegurado una cantidad igual o menor que la pérdida financiera, si el bien, asegurado se viera dañado o destruido durante el período de vigencia y según las condiciones de la póliza. El pago aleatorio ligado al monto de la pérdida se llama "indemnización", la que no podrá ser mayor a la suma asegurada. Y la contrapartida del compromiso por parte del asegurado reflejado en la póliza se llama **prima** y se determina mediante el principio de equivalencia financiero-actuarial entre asegurador y asegurado (Sandoya, 2007).

Para una operación de seguros individual, suponemos que la función de utilidad del asegurador es lineal. El asegurador adopta el principio de valor esperado, es decir, el asegurador establece como precio básico para la cobertura total de la pérdida esperada E(ξ)=P, llamada **PRIMA PURA.**

Demostración que P=E(ξ). Este concepto parte de la neutralidad al riesgo (comportamiento lineal).

$$U(r) = a + br$$

$$U(r - P) = E[U(r - \xi)]$$

$$a + b(r - P) = E[a + b(r - \xi)]$$

$$a + br - bP = E[a + br - b\xi]$$

$$a + br - bP = a + br - bE(\xi)$$

$$-bP = -bE(\xi)$$

$$\boldsymbol{P = E(\xi)}$$

Dada la prima pura, el asegurador necesita hacer ciertos recargos para cubrir gastos administrativos, cobranzas y cierta seguridad frente a pérdidas; es decir, este último recargo está destinado a cubrir desviaciones de la siniestralidad con respecto a su valor medio, por lo que su cálculo también dependerá de otras opciones como reaseguro y reservas de solvencia. Todo esto incrementa la prima pura a lo que se llama prima bruta o prima con recargo de seguridad representada por π.

$$\pi = P + P\rho + c, \quad \rho > 0, c > 0$$

$$\pi = P(1 + \rho) + c, \quad \rho > 0, c > 0$$

Donde P*ρ representan la cantidad asociada a los gastos que varían con las pérdidas esperadas y con el riesgo cubierto en lo relativo a las desviaciones respecto de las reclamaciones esperadas; es decir, cuando a la prima pura se le suma un recargo de seguridad, se conoce como prima pura recargada o prima pura con recargo de seguridad (P(1+ρ)). Este recargo se destina para cubrir las desviaciones aleatorias negativas de siniestralidad con respecto a su valor medio, y contribuye a garantizar la solvencia del asegurador. Y la constante c se refiere a los gastos esperados, que no varían con las pérdidas (Sandoya, 2007).

Si el asegurado tiene una función de utilidad U(r) y se enfrenta a posibles pérdidas ξ, se mostrará indiferente a pagar una cantidad de prima **P** al asegurador, y que este se comprometa a cubrir las pérdidas y asumir el riesgo, se expresa como:

$$U(r-P) = E[U(r-\xi)] \tag{1.1}$$

Partiendo de la ecuación 1.1, el primer término (lado izquierdo de la igualdad), significa la utilidad, pagando la prima para obtener protección financiera; y, el segundo término (lado derecho de la igualdad), representa la utilidad esperada de no comprar el seguro (asunción del riesgo). Es decir, las dos opciones proporcionan una utilidad al fin del día, la primera opción (lado izquierdo de la igualdad), es una utilidad conocida; mientras que, la segunda opción (lado derecho de la ecuación), es una utilidad esperada. Si ambos lados se igualan, al dueño del bien, le es indiferente asegurarse o no. Como mencionamos en párrafos anteriores, si el asegurador no dispone de una subvención en caso de que la pérdida sea mayor a la pérdida esperada, la compañía correría el riesgo de quebrar, por lo tanto, el asegurador debe cobrar una prima superior a las pérdidas esperadas para evitar sus pérdidas por desviaciones de siniestralidad.

Un decisor se supone adverso al riesgo y, por lo tanto, estaría dispuesto a pagar una cantidad superior a su pérdida esperada. Para evitar ese riesgo, si:

$$U(r-P) > E[U(r-\xi)] \tag{1.2}$$

La expresión 1.2 quiere decir que, al fin del día, la utilidad que le proporciona el aseguramiento es mayor a la utilidad esperada de no asegurarse y asumir el riesgo con recursos propios.

Por lo último, el asegurado será propenso si:

$$U(r-P) < E[U(r-\xi)] \tag{1.3}$$

La ecuación 1.3 explica el comportamiento de los decisores que no están dispuestos a asegurar ya que la utilidad que le proporciona el aseguramiento es menor que la utilidad esperada de no asegurar.

Hasta este punto, hemos analizado el comportamiento del asegurado, pero, ¿Qué hay del asegurador?

Sea U_A (r_A), una función de utilidad genérica del asegurador y r_A los recursos monetarios actuales del asegurador, entonces, la prima aceptable mínima π, para cubrir pérdida aleatoria ξ, desde el punto de vista del asegurador se la puede obtener mediante la expresión siguiente:

$$U_A(r_A) = E[U_A(r_A + \pi - \xi)] \qquad (1.4)$$

Donde el primer miembro de la ecuación 1.4 es la utilidad asociada a la situación actual del asegurador y el segundo miembro es la utilidad esperada asociada a la prima bruta π y a hacerse cargo de la pérdida aleatoria ξ, es decir, el asegurador se mostraría indiferente entre la situación actual y de cubrir unas posibles pérdidas ξ mediante el cobro de una prima π.

Puesto que, el asegurador es adverso al riesgo, se tendrá que la utilidad esperada es menor o igual a la utilidad deseada:

$$U_A(r_A) = E[U_A(r_A + \pi - \xi)] \leq U_A(r_A + \pi - \mu) \qquad (1.5)$$

Donde se podría concluir que $\pi \geq \mu$

Por otra parte, sabemos que la función de utilidad está basada en las preferencias del decisor y, puesto que, un asegurador puede ser una asociación, empresa, etc. La determinación de la función de utilidad del asegurador U_A (r_A) es una cuestión bastante complicada en la práctica.

Nota importante: La aplicación del cálculo de probabilidades requiere, esencialmente, que los mecanismos subyacentes en una situación de incertidumbre, permanezcan inalterados durante el período en que va a utilizarse. Si se toma un grupo relativamente grande de personas de la misma edad, puede afirmarse que, en el transcurso de un año, se registrará un número determinado de fallecidos de dicho grupo, debido al fenómeno demográfico de la mortalidad que actúa de manera inexorable sobre los seres humanos. Si el mecanismo de mortalidad permanece constante, es decir, las condiciones de tipo geográfico, de salud, y bienestar de la población no se modifican, puede decirse que las afirmaciones probabilísticas sobre un comportamiento futuro tienen una precisión adecuada y además el riesgo de equivocarse está controlado. La misma afirmación se podría decir sobre los demás ramos de seguros. Lo esencial es que se trabaje con grupos de personas u objetos que tengan un riesgo homogéneo y que este no se modifique en el transcurso del tiempo; caso contrario, si, por ejemplo, aparece una epidemia imprevista, variarían los patrones de mortalidad y ya no sería posible mantener la validez de las mismas afirmaciones probabilísticas a cerca del grupo de estudio.

Conclusión: Los diferentes grupos en observación son iguales en cuanto a la influencia de la mortalidad.

Ejemplo

Supongamos que la función de utilidad del propietario es U(r) =√r. El decisor dispone de unos recursos r =20u.m. y se enfrenta con una posible pérdida aleatoria de estos recursos ξ con distribución uniforme en [0,20]. Se pide determinar la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el decisor por un seguro que le cubra la posible pérdida.

$$\mathrm{U(r)} = \sqrt{r}$$

$$\mathrm{U(r-P)} = \mathrm{E}(\mathrm{U}\sqrt{(r-\xi\,)})$$

$$\sqrt{\mathrm{r-P}} = \mathrm{E}(\sqrt{r-\xi}\,)$$

$$\sqrt{20-\mathrm{P}} = \int_0^{20} \frac{1}{20}\sqrt{20-\xi}\,d\xi$$

$$\sqrt{20-\mathrm{P}} = \frac{1}{20}\int_0^{20} (20-\xi)^{1/2}\,d\xi$$

$$\sqrt{20-\mathrm{P}} = \frac{1}{20}\left.\frac{(20-0)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|$$

$$\sqrt{20-\mathrm{P}} = \frac{1}{20}\frac{(20-0)^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{P} = 11.11$$

La prima máxima que estará dispuesto a pagar el propietario de un bien es $11.11.

1.7. Ejercicios propuestos

1. Juan Martínez desea asegurar el patrimonio de que dispone: 1 Vehículo BMW año 2008, la fecha actual es 16 de mayo de 2016, el valor comercial del vehículo es de $100.000. Para obtener la cobertura por 1 año, el asegurador se llama Deltha Seguros.

Basándose en los datos dados anteriormente: Diferenciar los datos esenciales de una póliza de seguros. (Base su respuesta en el artículo 2 del Decreto Supremo 1147).

2. ¿Cuál será el precio realmente justo de cada uno de los siguientes juegos?

a. Ganar \$2.000 con una probabilidad del 50% o perder \$2.000 con probabilidad del 50%

b. Ganar \$2.000 con probabilidad del 60% o perder \$2.000 con probabilidad del 40%

c. Ganar \$2.000 con probabilidad del 70%, perder \$4.000 con la probabilidad del 20% o perder \$10.000 con probabilidad del 10%.

3. El Señor X tiene una riqueza inicial de \$5.000, y va a apostar \$20 a que su equipo ganará el campeonato, en tal caso, recibirá un premio de \$200. El Sr. X tiene una función de utilidad del dinero logarítmica U(w)=Ln(w), donde w es la riqueza final. ¿Con al menos cuánta probabilidad debe pensar el Sr. X que su equipo ganará el campeonato? ¿Si el premio fuera de \$400? ¿Si el premio fuera de \$40? Sacar una conclusión.

4. Un agricultor tiene una función logarítmica del dinero de U(w)=Ln(w), donde w es la riqueza final. La riqueza inicial del agricultor es \$25.000, y planea comprar semillas genéticamente modificadas para resistir plagas. Los ingresos serán de \$80.000 si llueve y \$5.000 si no llueve. La probabilidad de lluvia es 50%, y el costo de inversión de semillas es de \$20.000. Si no invierte en semillas los ingresos serán de \$40.000 si llueve, y \$5.000 si no llueve. ¿Le interesa llevar adelante el proyecto? ¿A partir de que probabilidad de lluvia invertir es preferible a no invertir?

5. La función de utilidad de un tomador de decisiones viene dada por $u(w)=-e^{-5w}$ El tomador de decisiones tiene dos perspectivas económicas disponibles al azar. El resultado de la primera se representa por X, que tiene una distribución normal con media 5 y varianza 2, esto se representará así: $N(\mu,\sigma^2)$. La segunda perspectiva representada por Y, se distribuye N(6,2.5). ¿Cuál prospecto será el preferido?

6. Si la función de utilidad de una persona viene dada por $(r)=\sqrt{r}$, esta persona tiene una riqueza igual a 10 u.m, y se enfrenta a una posible pérdida aleatoria ξ, con distribución de probabilidad uniforme en (0,10). Determinar la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar la persona por un seguro.

7. Una persona tiene una función de utilidad $U(r)=-e^{-r}$, siendo ξ una variable aleatoria de Bernoulli, el decisor está dispuesto a pagar una prima P1 para asegurarse contra una pérdida de 1 u.m., en donde la probabilidad de pérdida es P. ¿Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar el decisor por el seguro?

8. Supongamos que la función de utilidad de una persona es $U(r)=-e^{-r}$

a. La persona está tratando de pagar una cantidad P1 para asegurarse contra una pérdida de 1 u.m., donde p es la probabilidad de pérdida.

b. La persona está tratando de pagar una cantidad P2 para asegurarse contra una pérdida de

1 u.m., donde (1- p) es la probabilidad de pérdida.

c. La persona está tratando de pagar una cantidad P3 para asegurarse contra una pérdida de 1 u.m., donde 0,5 es la probabilidad de pérdida.

Se pide indicar cuál de las siguientes expresiones es verdadera.

$$e^{P_1} + e^{P_2} = e + 1$$

$$P_3 = Ln\ (e + 1)$$

$$Ln(e^{P_1} + e^{P_2}) - P_3 = Ln\ 2$$

9. Un tomador de decisiones dispone de unos recursos de 200u.m. y su función de utilidad viene dada por U(r)=Ln r, donde r es la riqueza final y enfrenta a una pérdida aleatoria expresada de la siguiente forma:

Tabla 6. Probabilidad de pérdida aleatoria

Pérdida	Probabilidad
0	0,50
50	0,25
100	0,25

Se pide determinar la prima máxima que el decisor estará dispuesto a pagar para concertar el seguro que cubra la pérdida.

10. Dos personas (A y B) tienen la misma función de utilidad: U(r)=√r

A dispone de 10 u.m. y se enfrenta a una pérdida aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo (0,10).

B dispone de 20 u.m. y se enfrenta a una pérdida aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo (0,20).

Se pide determinar: La cantidad máxima (X) que A estaría dispuesto a pagar por un seguro, y la cantidad máxima (Y) que B estaría dispuesto a pagar por un seguro. Determinar Y-X.

11. Un tomador de decisiones tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(w) = w - 0{,}01w^2; w < 50$$

El tomador de decisiones podría mantener su riqueza w, con probabilidad p, o sufrir una pérdida de cantidad c, con la probabilidad de (1-p). Los valores de w, c y p se muestran en la tabla a continuación:

Tabla 7. Probabilidad de riqueza y pérdida

Riqueza	Pérdida	Probabilidad
10	10	0,50
20	10	0,50

Encontrar la prima máxima que el tomador de decisiones estaría dispuesto a pagar por un seguro, asuma que $c \leq w < 50$.

12. Un asegurador dispone de unos recursos de 1 u.m. y una función de utilidad $U(r)=-e^{-r}$. El asegurador pagará todo el montante de la pérdida aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo (0,1). Determinar la prima mínima aceptable para esta cobertura.


XX01
XX02
XX03

Capítulo 2

Variables aleatorias relacionadas con la vida y tablas de mortalidad


XX01
XX02
XX03

Capítulo 2

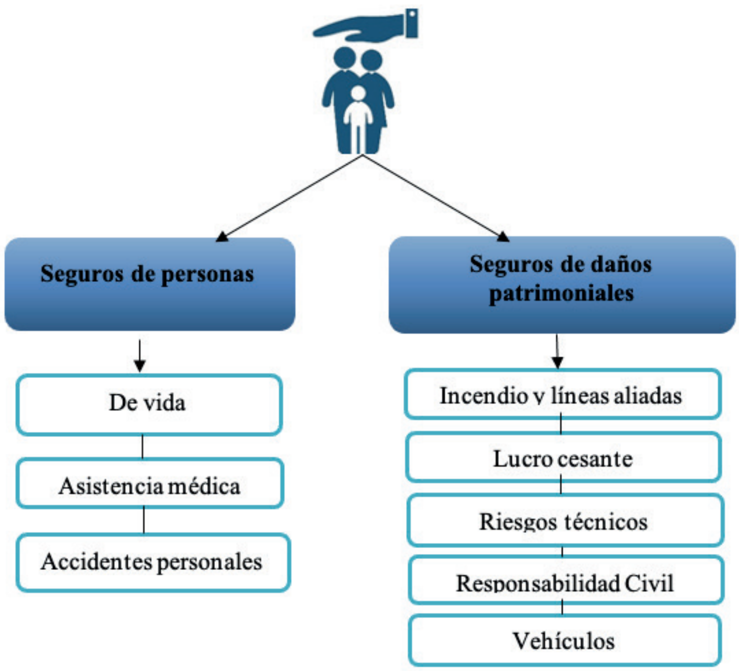
Variables aleatorias relacionadas con la vida y tablas de mortalidad

Antes de ver las variables aleatorias relacionadas con la vida y las tablas de mortalidad, analizaremos algunos conceptos clave.

2.1. Clasificación de los seguros

A continuación, exponemos los ramos más importantes de la industria de seguros en el Ecuador:

Figura 21. Clasificación de los seguros



Cada rama de seguros es diferente, desde la gestión operativa de los aspectos comerciales, hasta el cálculo de la prima que refleje el principio de equivalencia financiero- actuarial. En este texto, analizaremos actuarialmente los seguros de vida.

2.2. Contrato de seguros o póliza de seguros

El contrato de seguros es un convenio o contrato entre dos partes: la compañía de seguros y el asegurado, en el que se establece que el asegurador se compromete a cubrir económicamente al asegurado, dentro de los límites convenidos, cuando se presente un siniestro (robo, incendio, fallecimiento, etc.), durante la vigencia del contrato (póliza). Como contrapartida, el asegurado se compromete a pagar una prima al asegurador.

Para Diz (2013), la póliza tiene dos características importantes:

Es la prueba de que el contrato existe

Es la normativa que regula la relación entre los contratantes.

2.3. Características de un contrato de seguros

Según el Decreto Supremo 1147, legislación sobre el contrato de seguros, publicado en 1963, el Contrato de Seguros es por naturaleza:

Bilateral: Obligación recíproca entre asegurado y asegurador.

Oneroso: Las partes reciben una utilidad de proteger el bien; el uno, una utilidad en términos psicológicos y, el otro, por recibir la prima.

Principal: no depende de otro acto para su validación, sin depender de ningún contrato existente. No así en fianzas.

Conmutativo: La prima que paga quien contrata el seguro está perfectamente compensada, por la protección y tranquilidad que

Es aleatorio: Se desconoce si su resultado va a presentar ganancias o pérdidas.

(2.6)

2.4. Variables aleatorias relacionadas con la vida

En el caso de seguros de vida la variable aleatoria es la edad de muerte o fallecimiento y supervivencia. La muerte no es riesgo, porque es cierta, pero no se sabe cuándo llegará, eso es el riesgo, en donde el interés asegurable es el interés económico de los beneficiarios de la póliza de seguro de vida.

Si medimos la edad de muerte o fallecimiento en años cumplidos estamos hablando de una variable discreta, no así si la edad de muerte, la medimos como un punto en el tiempo. En este caso, será una variable continua, que como mencionamos en el capítulo 0, se asocia con una distribución de densidad f(x), que puede tomar un valor en cualquier intervalo. En matemática y cálculo actuarial, la variable aleatoria es la edad de fallecimiento o supervivencia de una persona o grupo de personas. Consideremos un ejemplo en donde la edad de fallecimiento es nuestra variable aleatoria y está representada por ξ.

El número de años de supervivencia de una persona es la variable aleatoria; si se sabe que la edad máxima que alcanzan las personas es de 100 años, entonces, la variable aleatoria puede tomar diferentes valores (ξ) entre [0,100]. En sentido práctico, que la variable aleatoria tome un valor específico como 75,857534 años es remota, por lo tanto, resulta más significativo encontrar la probabilidad de ocurrencia del evento en un intervalo específico por ejemplo entre 0 y 30. Es decir, $0< \xi <30$.

Como conclusión:

Cuando la longitud del intervalo tiende a 0, la probabilidad de que ξ tome un valor dentro de ese intervalo también tiende a 0; la probabilidad de que ξ tome un valor en particular es 0. La probabilidad de que ξ pertenezca a algún intervalo no se ve afectada si uno de los dos extremos del intervalo está incluido o excluido.

Ejemplo

$$p(\xi \leq 15) = p(\xi < 15) + p(\xi = 15)$$

$$= p(\xi < 15) + 0$$

$$= p(\xi < 15)$$

Las probabilidades asociadas con las variables aleatorias continuas se pueden presentar gráficamente de la siguiente manera:

$$p(2 \leq \xi \leq 5) = p(2 < \xi < 5)$$

Se puede hacer un gráfico mediante la función y=f(x), tal que el área bajo este gráfico entre las rectas ξ =2 y ξ =5, represente la probabilidad que ξ asuma un valor entre 2 y 5. Esta área está definida por la integral:

$$p(2 \leq \xi \leq 5) = \int_2^5 f(x)dx$$

Esta es la función de densidad de probabilidad de ξ y define la distribución de ξ, dado que las probabilidades no son negativas, entonces, f(x)≥0, y -α≤ξ≤+α=1

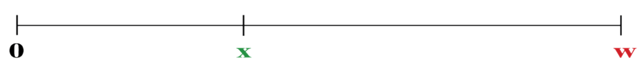
Al final, lo que se trata es de estimar el patrón de mortalidad de un grupo de personas. Para esto, una herramienta básica es la tabla de vida (que la desarrollaremos más adelante); por el momento, veremos algunos conceptos fundamentales para el cálculo actuarial.

2.5. Función de distribución de la variable edad de fallecimiento.

Antes de entrar a desarrollar cálculos de primas de seguros es necesario desarrollar algunos conceptos para usar la distribución del tiempo de supervivencia y la distribución que corresponde a las variables aleatorias , asociadas a la edad de fallecimiento/quiebra de un recién nacido o de una empresa creada.

Si **x** es la edad de una persona en un momento determinado, en donde x puede tomar valores entre 0 y el límite superior de supervivencia ω.

Figura 22. Distribución del tiempo de supervivencia



Sea ξ la variable aleatoria relacionada con la edad de fallecimiento/quiebra de un recién nacido o empresa recién creada y F(x) es la función de distribución de la variable ξ, por lo tanto:

$$F(x) = P(\xi \leq x); x > 0 \qquad (2.1)$$

Figura 23. Distribución de la probabilidad de fallecimiento

Por tanto, la función de distribución de x, F(x), es la probabilidad de que la variable aleatoria ξ tome valores menores o iguales a x.

Por ejemplo: F (10) = Probabilidad que la variable aleatoria ξ tome valores menores o iguales a 10, en otras palabras: P(ξ≤10).

En el contexto de nuestro libro es la probabilidad que la edad de fallecimiento de un recién nacido sea menor o igual a 10.

Ejemplo

Plantee el siguiente ejercicio: Probabilidad de fallecimiento de un recién nacido entre 15 y 20 años.

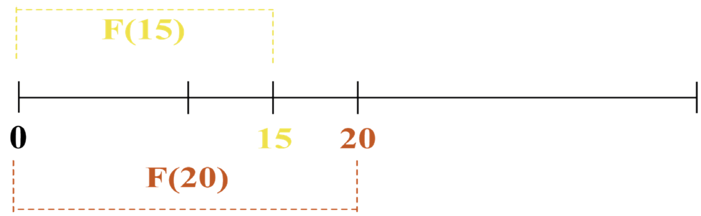
$$P(15 < \xi \leq 20)$$

$$F(20) = P(\xi \leq 20)$$

$$F(15) = P(\xi \leq 15)$$

$$F(20) - F(15)$$

Figura 24. Probabilidad de la variable aleatoria con valores menores o iguales a x



En teoría estadística:

$$\lim_{y \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{y \to +\infty} F(x) = 1$$

En conclusión, la función de distribución de la variable edad de fallecimiento de un recién nacido tiene tres propiedades:

- Es creciente: A medida que aumenta la edad, la probabilidad que la edad de fallecimiento de una persona de edad x sea mayor que esa edad es mayor; es decir, la probabilidad que un recién nacido fallezca a determinada edad aumenta conforme avanza la edad.
- F (0) = 0: La probabilidad que un recién nacido fallezca a esa edad es cero (en el modelo no existen abortos).
- F (w) = 1: La probabilidad que la edad de fallecimiento de un recién nacido sea menor o igual al límite superior de supervivencia es 1.

2.6. Función de supervivencia

Siguiendo con la cadena de nuestro análisis, si F(x) es la probabilidad que la variable aleatoria tome valores menores o iguales a x, definimos la función de supervivencia de la siguiente manera:

$$S(x) = 1 - F(x) \qquad (2.2)$$

$$S(x) = 1 - P(\xi \leq x) \qquad (2.3)$$

Que se interpreta como la probabilidad de que sobreviva después de x años o la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a la edad x.

Por lo tanto:

$$\mathbf{S\ (0) = 1 \qquad y \qquad S\ (w) = 0}$$

En este sentido:

$$\lim_{x \to \infty} s(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} s(x) = 1$$

En conclusión, la función de supervivencia tiene tres propiedades:

- Es decreciente: es una función decreciente; es decir, a medida que aumenta la edad, la probabilidad de que la edad de fallecimiento de x, sea mayor que esa edad sed hace menor. Es decir, la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a una determinada edad cae conforme se avanza en la edad.

- S (0) = 1: La probabilidad que una persona fallezca después de nacer es 1 (en el modelo no existen abortos).

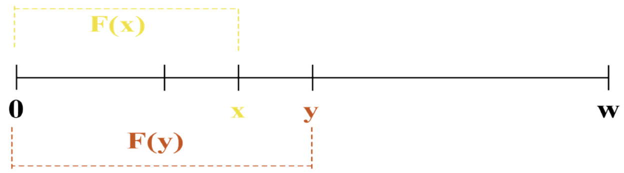
- S(w)=0 si w es la edad en el que ninguna persona puede sobrevivir, la probabilidad que sobreviva después de esa edad es 0.

Ejemplo

Grafique y exprese en función de distribución y en función de supervivencia, ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre la edad x y *y*?, donde *y*>x.

En función de distribución:

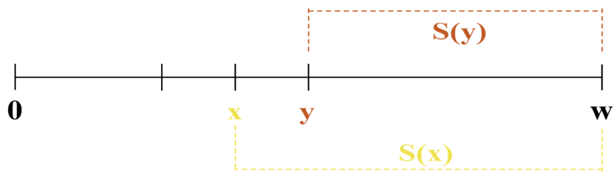
Figura 25. Diferencia entre funciones de distribución



Es más probable que fallezca el recién nacido en *y* que en x. F (y)-F(x)

En función de supervivencia:

Figura 26. Diferencia entre funciones de supervivencia

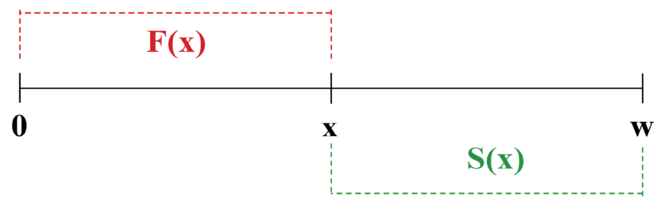


Es más probable que el recién nacido cumpla x años que y años. S(x)-S(y)

2.7. Ley del complemento

Se refiere que el S(x) y F(x) son complementos; gráficamente lo podemos ver a continuación:

Figura 27. Complemento entre la función de supervivencia y de distribución



$S(x) + F(x) = 1$

Por tanto:

$S(x) = 1 - F(x)$

O

$F(x) = 1 - S(x)$

Ejemplo

Determinar

S(30)-S(90)

En términos de función de distribución:

$$S(30) - S(90)$$
$$= 1 - F(30) - (1 - F(90))$$
$$= -F(30) + F(90)$$
$$= F(90) - F(30)$$

Lo anterior significa que la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre los 30 y 90 años viene dado por:

$S(30) - S(90)$ o $F(90) - F(30)$.

Por lo tanto, generalizando:

$$P(x \leq \xi \leq y) = S(x) - S(y) \; o \; F(y) - F(x)$$

Si la expresión anterior es la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades X y Y, ¿cuál será la probabilidad de fallecimiento condicionada a que tiene ya X años?

La solución a esta pregunta se plantea a continuación:

$$P(x \leq \xi \leq y | \xi > x) = \frac{P(x \leq \xi \leq y)}{P(\xi > x)}$$

$= \frac{F(y)-F(x)}{1-F(x)}$ O también: $= \frac{s(x)-s(y)}{s(x)}$

2.8. Tiempo futuro de supervivencia

Sea x la edad de una persona, el tiempo futuro de supervivencia de una persona de edad x es:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \xi - x \qquad (2.4)$$

Es decir, el tiempo futuro de supervivencia es lo que le queda por vivir a la persona de edad x. donde ξ es la edad de fallecimiento, al no conocer con certeza ξ, lo máximo que podemos hacer es estimar las probabilidades de que T(x), sea mayor o menor o igual a un valor t.

En el campo discreto, se representa como K(x) y se denomina tiempo de vida abreviado; dicho de otra manera, presenta el número de años completos de supervivencia. En donde:

$$P(k(x) = k) = P(k < T(x) < k + 1) \qquad (2.5)$$

$${}_{k}p_{x} - {}_{k+1}P_{x} = {}_{k+1}q_{x} - {}_{k}q_{x}$$

Nomenclatura general

${}_{t}\mathbf{q}_{x}$ = Probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro de t años; es decir, la probabilidad de que una persona de x años fallezca antes de la edad x + t.

$${}_{t}q_x = P(T(x) \leq t); t \geq 0$$

$${}_{t}q_x = P(x \leq \xi \leq x + t | \xi > x) = \frac{P(x \leq \xi \leq x+t)}{P(\xi > x)}$$

$$= \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} \text{ o } = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} \qquad (2.6)$$

- ${}_{t}P_x$ = Probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida la edad x + t o sobreviva t años más.

$${}_{t}P_x = P(T(x) > t$$

$${}_{t}P_x = 1 - {}_{t}q_x$$

$${}_{t}P_x = 1 - \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}$$

$${}_{t}P_x = \frac{s(x)-[s(x)-s(x+t)]}{s(x)}$$

$${}_{t}P_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} \qquad (2.7)$$

- ${}_{t/n}q_x$ = Probabilidad de que una persona de x años llegue con vida a la edad x + t y que fallezca después de n años.

$${}_{t/n}q_x = P(t < T(x) < n)$$

$${}_{t/n}q_x = \frac{s(x+t)-s(x+t+n)}{s(x)} \qquad (2.8)$$

También se lo puede expresar de la siguiente manera:

$${}_{t/n}q_x = {}_{t+n}q_x - {}_{t}q_x$$

$${}_{t/n}q_x = \frac{s(x)-s(x+t+n)}{s(x)} - \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}$$

$${}_{t/n}q_x = \frac{s(x+t)-s(x+t+n)}{s(x)}$$

Si se multiplica por $\frac{s(x+t)}{S(x+t)}$ de tal manera que no se altera la ecuación quedará:

$$\frac{s(x+t)-s(x+t+n)}{s(x)} * \frac{s(x+t)}{s(x)} = {}_{t}P_x * {}_{n}q_{x+t} = {}_{t/n}q_x$$

Ejemplo

Utilizando la función de supervivencia $s(x) = 1 - \frac{x}{80}$

- Hallar la probabilidad de que una persona de 25 años sobreviva 10 años más.

$$ {}_{10}P_{25} = \frac{S(35)}{S(25)} = \frac{1-\frac{35}{80}}{1-\frac{25}{80}} = \frac{0.5625}{0.6875} = 0.8181 $$

- Hallar la probabilidad de que una persona de 30 años fallezca dentro de 5 años.

$$ {}_{5}q_{30} = \frac{S(30)-S(35)}{S(30)} = \frac{1-\frac{30}{80}-(1-\frac{35}{80})}{1-\frac{30}{80}} = \frac{0.625-0.5625}{0.625} = 0.1 $$

- Hallar la probabilidad de que una persona de 30 años, llegue con vida a la edad 40 y fallezca dentro de los próximos 5 años.

$$ {}_{10/5}q_{30} = \frac{S(40)-S(45)}{S(30)} = \frac{1-\frac{40}{80}-(1-\frac{45}{80})}{1-\frac{30}{80}} = \frac{0.50-0.4375}{0.625} = 0.1 $$

2.12. Esperanza de vida abreviada e_x y completa e_x^0

Esperanza de vida abreviada e_x

¿Cuánto se espera que viva una persona de edad x?

Sabemos que hay mucha variedad en el futuro del grupo de individuos de la misma edad; unos vivirán más, otros menos, por lo que podríamos calcular la vida futura total de todos los individuos, dividiendo por el número de personas del grupo original; como resultado tendríamos una estimación promedio deseada.

Cuando abrimos un estudio demográfico, periódicos o almanaques, al referirse a la esperanza de vida, hablan de la esperanza de vida de un recién nacido, lo cual, es algo limitado. A continuación, calcularemos la esperanza de vida para una persona de cualquier edad.

Ejemplo

Tomemos tres personas de 60 años, suponga que uno fallece a los 62, otro a los 72 ¼ y el tercero a los 91 ¼

$$e_{60=}\frac{(62-60)+(72.25-60)+(91.25-60)}{3}$$

$$e_{60=}\frac{2+12.25+31.25}{3}$$

$$e_{60=15.16}\ años$$

En fórmula, la esperanza de vida abreviada a la edad x quedaría:

$$e_x = \sum_{k=1}^{w-k-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{w-k-1} kPx \qquad (2.9)$$

La palabra abreviada significa reducida o truncada, ya que mide solamente los años futuros de vida, sin contar la fracción del año vivida en el año de fallecimiento.

A la esperanza de vida abreviada, la podemos escribir también de la siguiente manera:

$$e_x = Px + 2Px + 3Px + \cdots \ldots \ldots \ldots . . w - x - 1Px$$

Esperanza de vida completa e_x^0

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2} \qquad (2.10)$$

Siguiendo con el ejemplo anterior y aplicando este concepto, el tiempo de vida futuro para la segunda persona será 12 años y para la tercera persona será 31 años, por lo que es necesario realizar un ajuste:

$$e_{60}^0 = 12.16 + \frac{1}{2}$$

$$e_{60}^0 = 12.66\ años$$

Esta se llama esperanza de vida completa.

Desde el punto de vista continuo, la esperanza de vida completa se expresa de la siguiente manera:

$$e_x^0 = E[T(x)] \qquad (2.11)$$

Donde:

T(x)=Tiempo futuro de supervivencia.

Recordando que:

$$T_x = \int_0^{\alpha} l_{x+t}\, dt \qquad (2.12)$$

Se tiene que:

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x} \qquad (2.13)$$

Esperanza de vida temporal $e_{x\ddot{}n}$

Podríamos estar interesados en el promedio de duración de vida durante los próximos n años, siendo n una duración fija; a esto lo llamaremos esperanza de vida temporal y es igual a:

$$e_{x\ddot{}n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{x+k}}{lx} = \sum_{k=1}^{n} kPx \qquad (2.14)$$

Esta expresión, nos da el número total esperado de años vividos durante los próximos n años de un grupo de personas de edad x.

2.13. Modelos de supervivencia/quiebra. Tablas mortalidad

Para el trabajo del actuario, en el campo del seguro de vida, el objetivo es estimar la mortalidad a través de un patrón exhibido en un grupo de personas, observando una generación desde el nacimiento hasta la muerte de la última persona de la generación (Promislow, 2015).

En la tabla de mortalidad se cuantifica: El número de sobrevivientes (lx), el número de fallecidos (dx), las probabilidades de supervivencia (Px) y fallecimiento (qx). Todas estas variables medidas por sexo, edad o incluso por hábitos como, por ejemplo, si son o no fumadores, por tanto, una tabla de mortalidad es una tabulación de lx y dx, donde x es un entero no negativo que representa la edad de la persona. La tabla terminará a cierta edad representada como w, que significa el límite superior de supervivencia, que es la edad en la que todo el grupo observado habrá fallecido. El valor de w puede ser de 100 años como en nuestro caso.

Nomenclatura general.

Si se sabe que l_x es el número de sobrevivientes a la edad x, esto quedará determinado por:

$$l_x = l_0 * s(x)$$

Donde:

- l_0 = Número de recién nacidos, en donde cada edad de fallecimiento tiene asociada una probabilidad y una determinada distribución de supervivencia.
- $s(x) = \frac{l_x}{l_0},$ que es la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a la edad x.

La tabla terminará a una cierta edad representada como w, tal que lw= 0

Partiendo de las expresiones 2.6, 2.7 y 2.8 calcularemos las probabilidades de supervivencia y fallecimiento en términos del número de sobrevivientes:

$${}_t\mathbf{P}_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$${}_t\mathbf{q}_x = \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{lx}$$

$${}_{t/n}\mathbf{q}_x = \frac{S(x+t)-S(x+t+n)}{S(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+n}}{lx}$$

El símbolo d_x es el número de fallecimientos en la edad x, donde:

$$d_x = l_x - l_{x+n}$$

También se lo puede expresar de la siguiente manera:

$$d_x = l_x * q_x$$

Por tanto, si al número de sobrevivientes a la edad x, le restamos el número de fallecidos a esa misma edad, tendremos el número de sobrevivientes a la edad x+1:

$$l_{x+1} = l_x - d_x$$

En la práctica es importante separar las tablas de vida masculina de la femenina, de un fumador y no fumador. Se debe considerar que la elección de una tabla apropiada es una tarea importante. Hay veces que en la práctica se utiliza un método muy simple llamado *múltiplos de mortalidad estándar*, es decir, construyen muchas tablas partiendo de la estándar; por ejemplo, se podría decir que para ciertos riesgos la mortalidad es 150% de la mortalidad estándar, para lo cual, se multiplica por 1,5 a la probabilidad de fallecimiento q_x estándar.

2.14. Tanto instantáneo

Sabiendo que qx es la probabilidad anual de fallecimiento, la intensidad de fallecimiento varía en cada momento y, por lo tanto, es necesario disponer de alguna forma de medir la variación instantánea, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} {}_{\Delta x}q_x = P(x < \xi < x + \Delta X / \xi > x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<\xi<x+\Delta X/\xi>x)}{\Delta x} * \frac{1}{s(x)}$$

Usando la función de distribución F(x) y la definición de probabilidad condicional se tiene la fuerza de mortalidad:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right] * \frac{1}{s(x)}$$

En donde:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right]$$

Es la definición de la derivada de F(x), que es la función de densidad f(x), por lo tanto, se tiene que la fuerza de mortalidad es:

$$\boldsymbol{\mu_x} = \frac{F'(x)}{s(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{\frac{l'x}{lo}}{\frac{lx}{lo}} = -\frac{l'x}{lx} \qquad (2.15)$$

La fuerza de mortalidad indica la probabilidad de fallecer a cierta edad, bajo la condición que la persona ya llegó con vida a esa edad; es decir, la probabilidad que una persona de edad x fallezca en un intervalo de tiempo infinitesimal.

Por lo tanto, no hay que confundir la f(x) con $\boldsymbol{\mu_X}$**, la primera es una función de probabilidad no condicional, mientras que, la fuerza de mortalidad necesita la condición que el individuo ya llegó con vida a la edad evaluada.**

Ejemplo

Supongamos que la edad de fallecimiento es una variable X, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100-x}{5000} \, para \; 0 \le x \le 100 \\ 0 \quad en\ el\ resto\ de\ los\ casos \end{cases}$$

Su función de distribución se obtiene:

$$F(x) = \int_0^x \frac{100-t}{5000}dt = \frac{1}{5000}\int_0^x 1000 - tdt = \frac{1}{5000} * 100x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{tqx}=\frac{F(X+t)-F(X)}{1-F(X)} = \frac{\frac{(x+t)[200-(x+t)]}{10000}-\frac{x(200-x)}{10000}}{1-\frac{x(200-x)}{10000}} \qquad (2.15)$$

$$\text{tqx}= \frac{200t-2xt-t^2}{10000-200x+x^2}$$

Si derivamos el numerador con respecto a t:

$$\frac{200-2x-2t}{1000-200x+x^2}$$

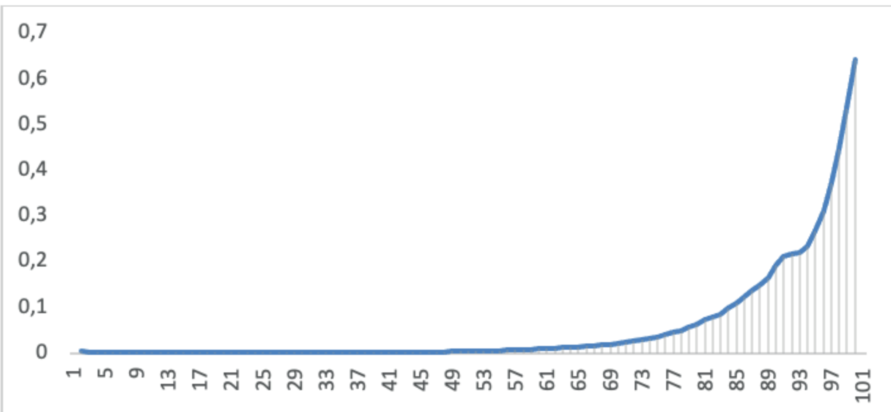
Se obtiene el tanto instantáneo calculando dicha derivada en el punto t=0:

$$\frac{200-2x}{1000-200x+x^2}$$

Si reemplazamos para **x = 25,** la fuerza de mortalidad es de 0,025. Esto quiere decir que la probabilidad de fallecimiento temporal arranca creciendo con una pendiente de 0,025 cada año.

El gráfico de la fuerza de mortalidad se muestra a continuación:

Figura 28. Fuerza de mortalidad



Si integramos entre 0 y x la fuerza de mortalidad para obtener la función de distribución en función de μ_x:

$$\int_0^x \boldsymbol{\mu}_y dy = \int_0^x \frac{f(y)}{1 - F(y)} dy$$

Resolviendo por sustitución:

$$H = 1 - F(y)$$

$$\frac{dH}{dy} = -F'(y)$$

Despejando dy quedará:

$$dy = -\frac{dH}{F'(y)}$$

Por lo tanto, la integral quedará:

$$\int_0^x \frac{f(y)}{H} * -\frac{dH}{F'(y)}$$

Sabiendo que la función de distribución es igual a la derivada de la función de distribución, la integral quedará:

$$\int_0^x \frac{1}{H} * -dH = -\int_0^x \frac{1}{H} dH$$

$$-Ln[1 - F(y)]\Big|_0^x$$

$$-Ln[1 - F(x)] - 0$$

Por tanto:

$$\int_0^x \mu_y dy = -Ln[1 - F(x)]$$

$$-\int_0^x \mu_y dy = Ln[1 - F(x)]$$

$$e^{-\int_0^x \mu_y dy} = 1 - F(x)$$

O lo que es lo mismo:

$$e^{-\int_0^x \mu_y dy} = S(x) = tPo \qquad (2.16)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{F(x)} = 1 - e^{-\int_0^x \mu_y dy} \qquad (2.17)$$

$$\mathbf{tPx} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y dy} \qquad (2.18)$$

$$\mathbf{tqx} = 1 - e^{-\int_x^{x+t} \mu_y dy} \qquad (2.19)$$

Para el cálculo en la tabla de mortalidad:

$$\mu_x = \frac{1}{2}(Lnl_{(x-1)} - Lnl_{(x+1)}) \qquad (2.20)$$

Deducciones adicionales

Al observar P(T(x)≤t), corresponde a la función de distribución de T(x), por lo que al derivarla obtendremos la función de densidad de probabilidad de T(x) que llamaremos g (t), el cual, indica la probabilidad que una persona de edad x, le queden exactamente t años de vida.

Es decir:

$$g(t) = P[T(x) = t]$$

$$g(t) = \frac{d(tqx)}{dt}$$

$$g(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{S_{(x+t)}}{S_{(x)}}\right) = 1 - \frac{d}{dt}\left(\frac{S_{(x+t)}}{S_{(x)}}\right) = -\frac{1}{S_{(x)}}\frac{d}{dt}\left[S_{(x+t)}\right]$$

$$g(t) = -\frac{S'_{(x+t)}}{S_{(x)}} \qquad (2.22)$$

Si a la expresión 2.22 multiplicamos por $\frac{S_{(x+t)}}{S_{(x+t)}}$ tendremos

$$g(t) = -\frac{S'_{(x+t)}}{S_{(x)}} * \frac{S_{(x+t)}}{S_{(x+t)}}$$

Reordenando

$$g(t) = \frac{S_{(x+t)}}{S_{(x)}} * -\frac{S'_{(x+t)}}{S_{(x+t)}}$$

$$g(t) = \text{tPx } \boldsymbol{\mu}_{x+t}$$

Esto indica la probabilidad de que una persona de x años esté viva a la edad x+t y que fallezca instantáneamente entre las edades x+t y x+Δt, en donde Δt tiende a cero.

2.15. Distribuciones de duraciones de vida

La distribución exponencial es la distribución más usada de las continuas; está estrechamente relacionada con una distribución de Poisson; mientras la última describe el número de veces que ocurre un evento en un determinado intervalo de tiempo, la distribución exponencial se utiliza para describir el tiempo entre la ocurrencia de los eventos independientes que ocurren a una tasa promedio constante o hasta completar la tarea (Peña, 2001). Puede tomar cualquier valor positivo no acotado. Esta distribución se usa para modelar la duración (vida, animales, componentes físicos, etc.); en nuestro caso, supondremos que la variable de interés es la duración de vida.

Una forma de caracterizar estas distribuciones es por la función que proporciona la probabilidad de fallecimiento en cada instante para los elementos que han sobrevivido hasta dicho instante.

Sea f(t) la función de densidad de una variable aleatoria continua positiva (0,α), la probabilidad de fallecimiento en el intervalo (t_0, t_0+Δx), para todos los elementos que han vivido t_0 resulta de aplicar la definición de probabilidad condicionada:

$$P(to < \xi < to + \Delta t \,/\xi > t_o) = \frac{P(to<\xi<to+\Delta x)}{P(\xi>to)} \qquad (2.65)$$

Ya que la probabilidad conjunta de los sucesos $\xi>t_0$ y $t_0<\xi\leq t_0+\Delta t$ coincide con la probabilidad del segundo. Llamamos $F(t_0)$ a la función de distribución de la variable en t_0:

$$P(to < \xi < to + \Delta x \,/\xi > t_o) = \frac{f(t_o)\Delta t}{1 - F(t_o)}$$

En el límite se define como la tasa de fallo o fuerza de mortalidad

$$\int_0^t \mu x \, dt = \frac{f(x)}{1-F(x)} dx = -\ln\left(1 - F(x)\right|_0^t = -\ln\left(1 - F(t)\right) \qquad (2.66)$$

Y llamando:

$$\gamma(t) = \int_0^t \lambda(x) dx \qquad (2.67)$$

La distribución exponencial se caracteriza por una fuerza de mortalidad constante: la probabilidad de fallecimiento en cualquier intervalo no depende de la vida anterior. Resulta, por lo tanto, adecuada para describir la aparición de muertes al azar, no debida al desgaste o deterioro (Peña, 2001).

Si suponemos que la fuerza de mortalidad es del tipo:

$$\mu x = ht^{c-1} \qquad (2.68)$$

Tendremos que la fuerza de mortalidad aumentará con el tiempo si c>1 será constante (distribución exponencial) si c=1 y disminuirá si c< , entonces, la función de densidad será:

$$f(x) = ht^{c-1} exp\left\{-\frac{h}{c}t^c\right\} \qquad (2.69)$$

Esto se conoce como distribución de Weibull.

La siguiente tabla recoge las probabilidades de muerte y fuerzas de mortalidad de un determinado país, en cierto año. Las probabilidades anuales de muerte por grupos de edad se han obtenido dividiendo el número de fallecimientos de cada grupo de edad para población de dicho grupo de edad. La tasa de mortalidad o fuerza de mortalidad se obtiene dividiendo el número de fallecidos de ese grupo de edades en un año por el número de personas con edad superior o igual al grupo considerado.

Tabla 8. Probabilidades de muerte y fuerza de mortalidad

Clases	**Censo (población en miles)**	**Defunciones**	**Probabilidad de fallecimiento * 1000**	**Fuerza de mortalidad * 1000**
Menores a 5 años	3075	6584	2.14	0.175
5-9 años	3308	896	0.27	0.026
10-14 años	3302	869	0.26	0.028
15 – 24 años	6205	4161	0.67	0.149
25 – 34 años	4993	4432	0.89	0.203
35 – 44 años	4302	6860	1.59	0.408
45- 54 años	4626	18107	3.91	1.449
55- 64 años	3634	37081	10.20	4.71
65 o más años	4237	223579	52.76	52.755
Total	37683	302579		

Si graficamos la evolución de la tasa de mortalidad, veremos que refleja tres tramos muy diferenciados:

Un primer tramo, la tasa de mortalidad es decreciente, que es explicada por la alta mortalidad relativa en el parto (Weibull c<1).

Un tramo de mortalidad constante, hasta la adolescencia (exponencial).

Un crecimiento exponencial de la mortalidad desde entonces. Puede representarse por una distribución de fuerza de mortalidad:

$$\mu x = ke^{bt} \qquad (2.70)$$

Que crezca exponencialmente con el tiempo, con lo que la distribución resultante para ese tramo es:

$$f(x) = ke^{bt} exp\left\{-\frac{k}{b}e^{bt} + \frac{k}{b}\right\} \qquad (2.71)$$

Se conoce como distribución de Gompertz. Esta proporciona una descripción bastante precisa de la duración de la vida humana después de los 20 años.

La distribución de Gompertz se usa para modelar curvas acotadas, son conocidas por su forma de S o sigmoidales, pues, son monótonas y presentan un punto de inflexión, donde la curva cambia su forma de cóncava a convexa. Gompertz mostró una curva asociada al modelo de la ley de mortalidad humana y la expresó como una doble exponencial; la curva de Gompertz muestra un mejor ajuste en patrones de mortalidad para adultos. En adultos jóvenes se observa que a menos que se encuentren factores externos, ajenos a la ley de vida, la tasa de mortalidad de estos permanece o crece a una tasa constante. La desaceleración de la mortalidad representa un menor riesgo de muerte, como en el caso de jóvenes adultos, en un principio la tasa de riesgo deja de aumentar con el tiempo, luego procede a una velocidad constante, produciendo un decaimiento exponencial.

La distribución de Gompertz tiene densidad de probabilidad con un parámetro α y otro en forma de b llamado así dado que indica la forma de distribución.

La función de densidad de Gompertz viene dada por:

$$f(x) = ae^{bx-\frac{a}{b}(e^{bx}-1)} \qquad (2.72)$$

En aplicaciones actuariales o demográficas, x representa la edad (que no puede ser negativa), haciendo que el soporte sea (0,, y la función de distribución viene dada:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{a}{b}(e^{bx}-1)} \qquad (2.73)$$

2.16. Fuerza de mortalidad de gompertz

Partiendo de la función de distribución de Gompertz:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{a}{b}(e^{bx}-1)} \qquad (2.74)$$

Sabemos que:

$$tPx = S(x)t = 1 - F(x)t \qquad (2.75)$$

Es claro que:

$$\frac{d\,tPx}{dt} = \frac{d\,(1-F(x)t)}{dt} \qquad (2.76)$$

$$= \frac{d}{dt} e^{-\frac{a}{b}(e^{bt}-1)} \qquad (2.77)$$

$$= -\alpha e^{bt-\frac{\alpha}{b}(e^{bt}-1)} \qquad (2.78)$$

Así la fuerza de mortalidad de Gompertz queda:

$$\mu x = \frac{\frac{d}{dt}tPx}{tPx} = ae^{bx\ ;ay\ b>0} \qquad (2.79)$$

La función de supervivencia de Gompertz vienen dada por:

$$l_x = l_0 - \frac{l_0}{w}x = l_0(1 - \frac{x}{w}) \qquad (2.83)$$

2.17. Elección de tablas de mortalidad

Las tablas varían en función del sitio donde fueron obtenidos los datos, sexo, estilo de vida, salud, etc. Cuando se visualiza una tabla de mortalidad se limita el estudio de la mortalidad al grupo particular de personas. Por ejemplo, se ha visto que la esperanza de vida de las mujeres es mayor a la esperanza de vida de los hombres en 5 a 7 años más, en comparación con un varón de la misma edad. También en los últimos años ha habido una abrumadora estadística sobre los peligros del tabaquismo, por lo que las compañías de seguros tienen tablas de fumadores y no fumadores. La elección de la tabla de vida dependerá del tipo de contrato, las tablas elaboradas a partir de los censos no son adecuadas para seguros, las compañías de seguros, normalmente, hacen revisiones a los clientes para asegurarse de que se encuentren en buen estado de salud. Por lo tanto, las tablas para las compañías de seguros se construyen únicamente observando sus contratos.

2.18. Algunas leyes de mortalidad

Ley de Moivre:

Esta ley supone que la función de supervivencia es una función lineal de la edad lx= c+d(x), para x≥0 . Los parámetros c y d son fácilmente identificables: donde c es el intercepto con el eje x y d, es la pendiente de la recta

Si x=0:

$$l_0 = c + d(0) = c \qquad (2.81)$$

$$l_w = 0 = c + d(w); w = -\frac{c}{d} = -\frac{l_0}{d} \qquad (2.82)$$

Como la ordenada al origen es l_0 y la pendiente es - $\frac{l_0}{w}$: , se escribe la ley de Moivre como:

$$l_x = l_0 - \frac{l_0}{w}x = l_0(1 - \frac{x}{w}) \qquad (2.83)$$

Para edades enteras, la función de supervivencia será una progresión aritmética decreciente, con diferencia $\frac{l_0}{w}$: :

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_0\left(1 - \frac{x}{w}\right) - l_0\left(1 - \frac{x+1}{w}\right) = \frac{l_0}{w} \qquad (2.84)$$

Dicho de otra manera, este modelo supone que los fallecimientos son iguales todos los años, que coincide con la pendiente con signo negativo de la función de supervivientes.

Las probabilidades de fallecimiento serán:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{\frac{l_0}{w}}{l_0(1-\frac{x}{w})} = \frac{1}{w-x} \qquad (2.85)$$

Como se puede ver, la probabilidad anual de fallecimiento es creciente, el número de fallecidos es constante, pero, pertenecen a un grupo que va disminuyendo con la edad.

La tasa instantánea de mortalidad, obviamente, también será creciente y coincide con la tasa anual de fallecimiento:

$$\mu x = -\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{\frac{l_0}{w}}{l_0\left(1-\frac{x}{w}\right)} = \frac{1}{w-x} \qquad (2.86)$$

Las probabilidades de supervivencia y fallecimiento para edades mayores a 1 año, serán:

$$_nP_x = \frac{l_{x+n}}{lx} = \frac{l_0(1-\frac{x+n}{w})}{l_0(1-\frac{x}{w})} = \frac{w-x-n}{w-x} = 1 - \frac{n}{w-x} = 1 - n\mu_x \qquad (2.87)$$

$$_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \text{nPx} = 1 - (1 - n\mu_x) = n\mu x \qquad (2.88)$$

Esta última expresión, nos indica que la probabilidad de fallecer en un tramo de n años, es proporcional a μx. Por ejemplo, la probabilidad de que una persona de x años fallezca después de 10 años, es el doble de los que lo haga en los próximos 5 años.

Adicionalmente, tenemos que la función de supervivencia queda como:

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0} = 1 - \frac{x}{w} \qquad (2.89)$$

La función de distribución será:

$$F(x) = 1 - S(x) = \frac{x}{w} \qquad (2.90)$$

En este caso, $f(x) = \frac{1}{w}$. Esto supone que, según la ley de Moivre, la variable aleatoria: edad de fallecimiento sigue una distribución uniforme (0, w)

Primera Ley de Dormoy:

Esta ley supone que la forma de la función de sobrevivientes lx es exponencial.

$$lx = KS^x \qquad (2.91)$$

Si x = 0, tendremos que lo=K, por tanto, K es el valor inicial de la cohorte.

$$lx = loS^x \qquad (2.92)$$

En este caso

$$S^x = e^{-\lambda x} \qquad (2.93)$$

Para edades enteras, los valores de la función de supervivencia se encuentran en progresión geométrica decreciente de razón S, por lo tanto, (S<1)

$$l_{x+1} = l_0 S^{x+1} = l_0 S^x S = l_x S \qquad (2.94)$$

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{lx} = S \qquad (2.95)$$

Entonces, la probabilidad anual del fallecimiento q_x es igual a:

$$q_x = 1 - S \qquad (2.96)$$

La probabilidad de supervivencia para n años será igual a:

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{lx} = \frac{l_0 S^{x+n}}{l_0 S^x} = S^n \qquad (2.97)$$

La probabilidad de fallecimiento será igual a:

$${}_nq_x = 1 - S^n \qquad (2.98)$$

La función de supervivencia es:

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 S^x}{l_0 S^0} = S^x \qquad (2.99)$$

Por lo tanto, la función de distribución será:

$$F(x) = 1 - S^x \qquad (2.100)$$

Si derivamos obtenemos la función de densidad:

$$F'(x) = f(x) = -S^x(\ln(S)) \qquad (2.101)$$

Segunda Ley de Dormoy:

En la primera ley de Dormoy, la probabilidad de fallecimiento y la fuerza de mortalidad no dependen de la edad. Para arreglar este supuesto poco realista se propone:

$$l_x = \mathrm{K}S_1^x S_2^{x^2} \qquad (2.102)$$

Si S_1 y S_2 son inferiores a 1, entonces, $K=l_0$

$$l_x = l_0 S_1^x S_2^{x^2} \qquad (2.103)$$

Como en el modelo anterior, suponemos que $S_1=e^{-\alpha}$, y $S_2=e^{-\beta}$ por lo tanto, se reescribe:

$$l_x = l_0 S_1^x S_2^{x^2} = l_0 e^{-(\alpha x + \beta x^2)} \qquad (2.104)$$

La probabilidad de supervivencia anual es:

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_0 S_1^{x+1} S_2^{(x+1)^2}}{l_0 S_1^x S_2^{x^2}} = S_1 S_2^{x^{2x+1}} \qquad (2.105)$$

La probabilidad de fallecimiento anual es:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - S_1 S_2^{x^{2x+1}} \qquad (2.106)$$

Primera ley de Makeham:

Suponemos que el tanto instantáneo de fallecimiento viene dado por la expresión:

$$\mu_x = A + BC^X \qquad (2.107)$$

El segundo término coincide con la ley de Gompertz, y supone un factor de resistencia a la muerte decreciente con la edad, que explica los fallecimientos por causas naturales, mientras que, el primer término explica causas el fallecimiento constante con la edad y se relaciona con los fallecimientos accidentales.

$$A > 0, B > 0, 0 < C < 1 \tag{2.108}$$

Ejercicios propuestos

1. Sabiendo que un determinado sector industrial se caracteriza porque: q0 = 0,70, q1=0,30; q2=0,40; q3=1, y que el grupo inicial está constituido por 1000 personas se pide: d0, l1, d1, l2, d2, l3, d3, l4.

2. Con un grupo inicial de 100.000, y 60q0 = 0,2917, completar la siguiente tabla de mortalidad:

Tabla 9. Tabla de mortalidad

X	qx	Px	dx	lx
60	0,02071			
61	0,02276			
62	0,0249			
63	0,02712			
64	0,02943			
65	0,03189			

Utilizando los resultados del cálculo anterior, calcular la probabilidad de que una persona de 60, fallezca entre 64 y 65.

3. Explicar para x=23, ¿Por qué? l23 = d23+l24.

4. Si q60=0,20, q61=0,25, q62=0,25, q63=0,30 y q64=0,40:

- **a.** Encuentre lx para todas las edades entre 60-65, comenzando con l60=1000.
- **b.** Encuentre la probabilidad de que uno de 61 fallezca entre 62 y 64.
- **c.** Encuentre la probabilidad de que uno de 62 llegue con vida a la edad 65.
- **d.** Dado e_{65}=0,80 encontrar para x entre 60 y 64.

5. Demostrar:

a. n/mqx es igual a:

$$\sum_{y=x+n}^{x+n+m-1} \frac{dy}{lx}$$

b. n/mqx = (nPx) (mqx+n), explique.

6. Se pide dar las expresiones de las siguientes probabilidades:

a. Probabilidad de que uno de 30 sobreviva 15 años.

b. Probabilidad de que uno de 30 alcance la edad 35.

c. Probabilidad de que uno de 30 fallezca entre los 35 y 36.

d. Probabilidad de que uno de 30 sobreviva, al menos 60 años más.

7. Si una tabla de fallecimiento viene representada por la función $lx = 1000\sqrt{100-x}$, calcular:

a. Probabilidad de supervivencia desde el origen hasta los 18.

b. Probabilidad de que teniendo 35, fallezca antes de los 50.

8. Tenemos que 5P40=0,80, 10P45=0,60, 10P55= 0,40 encontrar la probabilidad de que uno de 40 fallezca entre 55 y 65.

9. Supongamos que, de un grupo de 100 personas de 70 años, 10 morirán en el primer año, 15 morirán en el segundo año y 20 en el tercero; calcular: q70, q71, q72, 3P70.

10. Suponga que lx=100-x para x=0, 1, 2,3,………100. Buscar expresiones para:

a. nPx.

b. nqx.

c. La probabilidad de que x fallezca entre x+n y x+n+k.

11. Si $\mu_x = \frac{2}{100-x}$ para 0≤x≤100. Se pide calcular: S(x), lx, F(x), f(x).

12. Si la función de supervivencia de un determinado sector industrial viene dada por:

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right) para\ 0 \le x \le 100$$

Se pide calcular el tanto instantáneo que quiebra cuando una empresa del sector lleva funcionando 25 años.

13. Calcular la probabilidad de supervivencia 10P10, sabiendo que el tanto instantáneo de fallecimiento es:

$$\mu_x = \frac{1}{100-x} - \frac{1}{120-x} \; para \; 0 \leq x \leq 100$$

14. Confirme que la siguiente función puede servir como función de supervivencia, mostrar la $\mu_{(x)}$,$F_{(x)}$,$f_{(x)}$.

$$s(x) = e^{\frac{-x^3}{12}}$$

15. Si $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$ encontrar: $\mu_{(x)}$,$F_{(x)}$,$f_{(x)}$ p(10<ξ<40).

16. Si $s(x) = \left[1 - \frac{x}{100}\right]^{1/2}$ encontrar: 19P17, 15q36, 15/13q36, μ_{36}, E[T(36)].t

17. Si μ_x=0,001 , para 20≤ξ≤25, calcular 2/2q20.

18. Si $\mu_x = \frac{3}{100-x} - \frac{10}{250-x}$ para 40<ξ100, calcular:

a. 40P50

19. Si (25) fallece a los 58,6. Se pide determinar T_{25}.

20. Si l25= 1000, l28=955, q25=0,010 y P27= 955/975. Se pide obtener el valor de q26.

21. Si la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria ξ viene dada por: $f(x) = \frac{2x}{6400}$ para 0≤x≤80, se pide calcular 20q40, mediante el uso de probabilidad condicionada.

22. Sabiendo que t/qx=0,10 para t=1, 2,3,……9. Se pide calcular 2qx+5.

23. Hallar la probabilidad de que una persona de edad x esté viva a la edad x+t y que fallezca instantáneamente entre las edades x+t y x+Δt, en donde Δt tiende a 0. Utilice la función de supervivencia $s(x) = 1 - \frac{x^2}{8000}$.

Capítulo 3

Valores actuariales en caso de fallecimiento


XX01
XX02
XX03

Capítulo 3

Valores actuariales en caso de fallecimiento

Esta sección trata acerca de las operaciones de seguros que suministran un pago de una determinada cantidad al fallecimiento de un asegurado. Normalmente, al operar en el campo discontinuo, realizando la hipótesis de que el pago se hace al final del año de fallecimiento, cuando se opera en el campo continuo, la operación se hace al momento de fallecimiento.

Previo a la revisión de los modelos para operaciones de seguros de vida, es necesario trabajar con valores de conmutación. En las tablas de mortalidad, se puede ver columnas encabezadas con letras mayúsculas; cada una de estas representa un símbolo de conmutación, que no es más que una función matemática que combina algunos elementos de la tabla como el lx, dx con factores financieros, esto se lo hace con el objetivo de facilitar el cálculo de valores actuariales. Por tal motivo, empezaremos revisando nuestro primer valor de conmutación:

Valor de conmutación N° 1: Valor actual de una unidad monetaria: V^n

$$V^n = \frac{1}{(1+i)^n} \qquad (3.1)$$

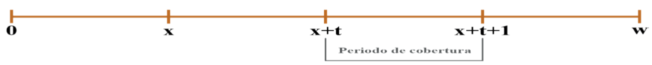
En adelante cuando veamos Vn nos referiremos al valor actual de una unidad monetaria, por n años.

NOTA: A lo largo del texto, se trabajará con una tasa de interés técnica del 4%, a menos que se mencione lo contrario.

3.1. Valores actuariales de operaciones de seguros de vida pagaderas al fin del año de fallecimiento.

3.1.1. Valor actuarial de una operación de seguros, cuya prestación consiste en el pago de un capital unitario al final del año de fallecimiento, siempre que este ocurra pasado t años y dentro del año siguiente. t/1Ax

Figura 29. Valor actuarial t/1Ax



Por lo tanto, la variable aleatoria asociada con el valor financiero actual, se define de la siguiente manera:

$$ {}_{1}\xi_{x}\begin{Bmatrix} 0 \ldots \ldots con\ probabilidad \ldots\ldots tqx \\ V^{t+1} \ldots con\ probabilidad \ldots\ t/qx \\ 0 \ldots\ldots con\ probabilidad \ldots t+1Px \end{Bmatrix} $$

NOTA: V^{t+1}, pues, es al finalizar el año en el que sucedió el fallecimiento.

Esta operación la vamos a representar de la siguiente manera:

$$ t/1Ax = V^{t+1} * t/1qx \qquad (3.2) $$

La expresión 3.2 es el valor actuarial o prima que tendrá que pagar una persona de x años para que tener una cobertura de 1 año (entre x+t y x+t+1), de tal manera que, si ocurre el fallecimiento, el beneficiario recibirá la suma de 1 unidad monetaria.

Aplicando los conceptos del capítulo anterior se sabe que $t/1qx = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$, por tanto, el valor actuarial quedará expresado de la siguiente manera:

$$ t/1Ax = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} * V^{t+1} \qquad (3.3) $$

Si a la expresión 3.3 multiplicamos por $\frac{V^x}{V^x}$, no alteramos a la igualdad, la expresión quedará:

$$t/1Ax = \frac{V^{t+1} * d_{x+t}}{l_x} * \frac{V^x}{V^x}$$

Por lo tanto:

$$t/1Ax = \frac{V^{x+t+1} * d_{x+t}}{l_x V^x} \qquad (3.4)$$

Como mencionamos en párrafos anteriores, lo valores de conmutación se lo aplican para facilitar el cálculo de los valores actuariales, ahora, expresaremos la ecuación 3.4 en valores de conmutación, para lo cual, es necesario conocer dos nuevos valores de conmutación:

Valor de Conmutación N°2 (ver anexo 2)

$$D_x = V^x l_x$$

Valor de Conmutación N°3 (ver anexo 2)

$$C_x = V^{x+1} d_x$$

Aplicando los valores de conmutación 2 y 3, el valor actuarial de nuestra operación de seguros será:

$$_{t/1}A_x = \frac{C_{x+t}}{D_x} \qquad (3.5)$$

Ejemplo

Suponga que a una persona de 20 años le interesa comprar un seguro de vida con una cobertura entre los 40 y 41 años; la suma asegurada es de $100.000. Calcule la prima única, utilice una tasa de interés técnico del 4%.

$$20/1A20 = \frac{C_{40}}{D_{20}} * 100.000.$$

$$20/1A20 = V^{21} * 20/1q20 * 100.000$$

$$20/1A20 = \frac{1}{(1+4\%)^{21}} * \frac{l40-l41}{l20} * 100.000$$

Calcular el valor actuarial para una persona de edad 20, cuya suma asegurada será de $80.000 que se pagará al fin del año de fallecimiento siempre y cuando el fallecimiento ocurra entre 30 y 31 años.

$$10/1A20 = \frac{C_{30}}{D_{20}} * 80.000$$

$$10/1A20 = V^{21} * 10/1q20 * 80.000$$

$$10/1A20 = \frac{1}{(1+3{,}88\%)^{21}} * \frac{l30-l31}{l20} * 80.000$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de 45 años firma una póliza de vida por $80.000 con cobertura entre los 50 y 51. Calcule la prima con la tabla del anexo 2

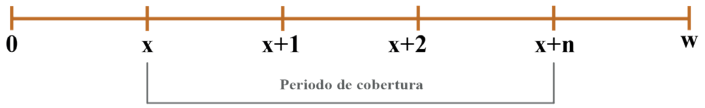
- Una persona de 33, desea contratar una póliza de vida con una suma asegurada de $150.000, el período de cobertura será entre los 35 y 36 años. Calcule la prima única, utilice una tasa de interés técnico del 3,2%. **NOTA**: utilice el número de sobrevivientes de la tabla del anexo 1

- El trabajador de una empresa desea ir de viaje después de 1 año. El tiempo que pasará fuera del país será de 1 año, hoy tiene 29 años; desea contratar una póliza de seguros que pague $120.000 a sus beneficiarios, en caso de fallecer durante su estadía fuera del país. Calcule la prima. Utilice una tasa de interés técnico del 4%.

- Si una persona de edad 25, quiere contratar un seguro que brinde una cobertura por 1 año, desde los 25 años, y se sabe que l_{25}=1000, d_{25}=300, y que la suma asegurada es de $30.000. Calcule la prima única utilizando una tasa de interés de 3,88%

3.1.2. Valor actuarial de un capital unitario pagadero al final del año de fallecimiento de x; siempre que esto ocurra dentro de los n años siguientes (seguro temporal).

Figura 30. Valor Actuarial $A'x:\overline{n}|$



Por lo tanto, la variable aleatoria asociada con el valor financiero actual, se define de la siguiente manera:

$$\xi^1_{x:n\rceil}\left\{\begin{array}{l} V \ldots\ldots\ para\ o/qx.\ fallece\ entre\ x\ y\ x+1; t=0 \\ V^2 \ldots..1\ /qx.\ fallece\ entre\ x+1\ y\ x+2;\quad t=1 \\ V^3 \ldots.\ldots..2/qx.\ fallece\ entre\ x+2\ y\ x+3; t=2 \end{array}\right\}$$

Cuando el fallecimiento ocurre dentro del primer año se actualiza con V^1, ya que el pago se realiza al fin del período.

Esta operación de seguros la representaremos como: $A'x:\overline{n}|$ .Que es el valor actuarial de un seguro temporal. Por lo tanto, este valor actuarial es igual a:

$$A'x:\bar{n}| = \sum_{t=0}^{n-1} t/1qx * V^{t+1}$$

$$A'x:\bar{n}| = \sum_{t=0}^{n-1} t/1Ax$$

$$A'x:\bar{n}| = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x} \qquad (3.6)$$

Ahora, procederemos a pasar la expresión 3.6 a valore de conmutación, para lo cual, es necesario conocer el cuarto valor:

Valor de Conmutación N° 4 (Ver anexo 2)

$$M_x = \sum_{t=0}^{\alpha} C_{x+t}$$

Aplicando algo de álgebra a la expresión 3.6 tenemos:

$$\frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=0}^{\alpha} C_{x+t} - \sum_{t=n}^{\alpha} C_{x+t}\right]$$

Reemplazando con el valor de conmutación #3 queda:

$$A'x{:}\bar{n}\,| = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad (3.7)$$

Ejemplo

Una persona de 20 años desea contratar un seguro cuya suma asegurada sea de $100.000 que se page a los beneficiarios si fallece antes de los 60. Determine el valor actuarial con la tabla de mortalidad al 4%.

$$A'20{:}40\,| = \frac{M_{20} - M60}{D_{20}} * 100.000$$

Calcular el valor actuarial para una persona de 30 años, que desea una cobertura de $80.000 que se pague a los beneficiarios, en caso de que el fallecimiento ocurra antes de los 50 años.

$$A'30{:}20\,| = \frac{M_{30} - M_{50}}{D_{30}} * 80.000$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de 28 años desea contratar una cobertura de seguros; fija una suma asegurada de $100.000, el pago se hará a los beneficiarios siempre que el siniestro ocurra antes de los 30 años. Calcule la prima única. Utilice una tasa de interés técnico del 5%.

- Mediante el uso de la tabla de mortalidad, calcular la siguiente prima: Una persona de 45 años quiere contratar una cobertura de seguros; fija una suma asegurada de $200.000 que se pague en caso de fallecimiento antes de los 65 años.

- Calcular el valor actuarial para una operación de seguros, cuyo pago se realiza al fin del año de fallecimiento si esto ocurre antes de los 70 años, sabiendo que la persona tiene 67 años y que la tasa de interés técnica es del 5%.

- Utilizando la tabla de mortalidad, calcular la prima única que tendrá que pagar una persona de 30 años, que desea una cobertura por 25 años, en donde los beneficiarios recibirán $40.000 al fin del año de fallecimiento si esto ocurre.

3.1.3. Valor actuarial de un capital unitario, pagadero al final del año de fallecimiento cuando sea que ocurra. Ax

Figura 31. Valor actuarial Ax

Como se observa en el gráfico, la cobertura comienza hoy y termina con el fallecimiento, por lo que este valor actuarial se expresa de la siguiente manera:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} t/1Ax \qquad (3.8)$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

Utilizando el valor de conmutación N° 4, el valor actuarial de una operación de seguros de vida entera es:

$$\boldsymbol{A_x} = \frac{M_x}{D_x} \qquad (3.9)$$

La expresión 3.8 y 3.9 se lo puede expresar también de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A_x} = 0/1Ax + 1/1Ax + 2/1Ax + \ldots + w$$

Ejemplo

Calcular la prima que tiene que pagar una persona de edad x=20, 30, 50; que pague a sus deudos en caso de fallecimiento cuando sea que ocurra. La suma asegurada de $ 100.000. Calcule la prima con la tabla de mortalidad.

$$A_{20} = \frac{M_{20}}{D_{20}} * 100.000$$

$$A_{30} = \frac{M_{30}}{D_{30}} * 100.000$$

$$A_{40} = \frac{M_{50}}{D_{50}} * 100.000$$

Una persona de 30 años quiere contratar un seguro de vida, de tal manera que, si ocurre el fallecimiento, la indemnización a los beneficiarios será de $40.000. Este pago se realizará al final del año de fallecimiento. La cobertura será de vida entera.

$$A_{30} = \frac{M_{30}}{D_{30}} * 40.000$$

También se lo puede expresar de la siguiente manera:

$$A_{30} = (0/1A30 + 1/1A30 + 2/1A30 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. + w)*40.000$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de 36 años quiere adquirir una cobertura de seguros que pague la suma asegurada de $200.000 en caso de fallecimiento, cuando sea que ocurra. Calcule la prima única. Utilice una tasa de interés técnico del 4%.

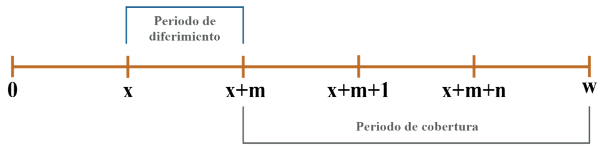
- Calcular el valor actuarial de una operación de seguros de vida entera, cuyo pago ($80.000) se realiza al fin del año de fallecimiento, sabiendo que la edad actual es de 45.

- Plantear utilizando el valor conmutación 1 y ${}_{t/1}q_x$ la prima de un seguro de vida que se muestra a continuación A_{30} y la suma asegurada es $10.000.

- Calcular la prima única que tendrá que pagar una persona de edad 65, por un seguro de vida entera, que pagará a los beneficiarios la suma de $20.000, si ocurre el fallecimiento. El pago se lo realizará al fin del año de fallecimiento (utilizar la tabla de mortalidad).

3.1.4. Valor actuarial de un seguro diferido m años cuya prestación es 1 unidad monetaria al final del año de fallecimiento (seguro de vida completa). m/Ax

Figura 32. Valor actuarial m/Ax



Dado que estamos tratando de un seguro diferido cuyo pago se hace al final del año de fallecimiento, en el período entre x y x+m no existe cobertura. Este período se llama período de diferimiento. La cobertura comienza desde x+m y termina en w.

Por lo tanto, la variable aleatoria asociada con el valor financiero actual, se define de la siguiente manera:

$$\xi_x \begin{cases} 0\ para & \square \qquad m/qx \\ V^{t+1} & ;\ t/qx \end{cases}$$

Por tanto, el valor actuarial m/Ax será igual a:

$$\sum_{t=m}^{w} V^{t+1} * t/1\ qx \qquad (3.10)$$

Que también lo podemos expresar con la siguiente diferencia:

$$\mathrm{m/Ax} = Ax - A'x{:}\overline{m}| \qquad (3.11)$$

Resolviendo la expresión 3.11, tendremos:

$$m/Ax = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x}$$

Por tanto, el valor actuarial m/Ax queda expresado de la siguiente manera:

$$m/A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \qquad (3.12)$$

Ejemplo

Una persona de 43 años quiere obtener una cobertura de seguros, para que pague a sus beneficiarios en caso de fallecimiento, $80.000, si esto ocurre pasados los 48 años. Calcule la prima. Utilice la tabla de mortalidad con la tasa del 4%.

$$5/A43 = \frac{M_{48}}{D43} * 80.000$$

Ejercicios propuestos

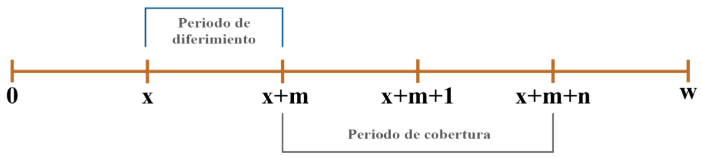
- Una persona de 54 años quiere obtener una cobertura de seguros, para que pague a sus beneficiarios en caso de fallecimiento $86.000, si esto ocurre pasados los 60 años. Calcule la prima. Utilice la tabla de mortalidad.

- Una persona de 21 años quiere obtener una cobertura de seguros, para que pague a sus beneficiarios en caso de fallecimiento $80.000, si esto ocurre pasados los 30 años. Calcule la prima. Utilice la tabla de mortalidad.

- Plantear utilizando el valor conmutación 1 y ${}_{t/1}q_x$ la prima de un seguro de vida que se muestra a continuación ${}_{30/}A_{30}$ y la suma asegurada es $10.000.

3.1.5. Valor actuarial de una operación de seguros con capital unitario, pagadero al fin del año de fallecimiento/quiebra si esto ocurre pasado m años y dentro de n años siguientes (seguro diferido y temporal). m/nAx

Figura 33. Valor actuarial m/nAx



El valor actuarial diferido y temporal puede quedar expresado como la diferencia de dos valores a actuariales temporales como se expresa a continuación:

$$m/nAx= A'_{x:m+n}\rceil - A'_{x:m}\rceil \qquad (3.13)$$

Pasando la expresión 3.13 a valores de conmutación tendremos:

$$m/nAx= \frac{M_x - M_{x+m+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x}$$

Por tanto, el valor actuarial $_{m/n}A_x$ queda expresado de la siguiente manera:

$$_{m/n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \qquad (3.14)$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de 30 años está interesada en una operación de seguros que presta los siguientes beneficios:
  - $100.000 si fallece antes de los 50 años.
  - $100.000 si fallece entre los 50 y 80 años.

Utilice la tabla de mortalidad.

- Una persona de 25 años está interesada en una operación de seguros:

$20.000 en caso de fallecimiento a sus deudos, en cualquier momento en que esto ocurra, la cobertura empezará desde los 30 años. Calcular la prima única utilizando la tabla de mortalidad.

- Una persona de 45 años desea una cobertura de seguros de vida desde los 50 a los 55 años; la suma asegurada será de $30.000 que se pagará a los deudos al fin del año de fallecimiento si ocurre. Adicional se sabe que: l_{45} =1000, l_{50}= 700, l_{51} =671, l_{52}= 622, l_{53} =592, l_{54}= 550, l_{55} =501. Utilice la tasa de interés técnica del 4%.

3.2. Valores actuariales cuyo pago se hace en el momento del fallecimiento

Hasta el momento hemos realizado el cálculo de valores actuariales cuyo pago se realiza al fin del año de fallecimiento. Este supuesto facilita mucho el cálculo porque supone el tiempo como variable aleatoria discreta. En la práctica esto no pasa, el tiempo es una variable aleatoria continua y, por lo tanto, la edad de fallecimiento también lo es.

3.2.1. Seguro temporal cuyo pago se realiza en el momento del fallecimiento. $\bar{A}_{x:n|}$

$$\bar{A}_{x:n|} = \int_0^n v^t \; xPt \;\; \mu_{x+t} \, dt \qquad (3.15)$$

3.2.2. Seguro de vida entera cuyo pago se realiza en el momento del fallecimiento. $\bar{A}_x$

$$\bar{A}_x = \int_0^\alpha v^t \;\; xPt \;\; \mu_{x+t} \, dt \qquad (3.16)$$

Discretización de campo continuo:

Para discretizar el valor actuarial consideremos el valor actuarial de una unidad monetaria con prestación a la 1/ m-ésima parte del año. (m) x

Si sabemos que

$$t/1qx = \frac{lx+t - lx+t+1}{lx}$$

Entonces:

$$\bar{A}(m)\ x = v^{1/m} * \frac{lx - lx + 1/m}{lx} + v^{2/m} * \frac{lx + 1/m - lx + 2/m}{lx} + v^{3/m} * \frac{lx + 2/m - lx + 3/m}{lx} + \cdots \quad (3.17)$$

La expresión 3.17 es el valor actuarial de un capital unitario que paga en la m-ésima parte de un año si ocurre el fallecimiento.

$$= \frac{1}{lx}\left[= v^{1/m} * lx - lx + 1/m + v^{2/m} * lx + 1/m - lx + 2/m + v^{3/m} * lx + 2/m - lx + 3/m\right]$$

$$= -\frac{1}{lx}\left[= v^{1/m} * lx + 1/m - lx + v^{2/m} * lx + 2/m - lx + 1/m + v^{3/m} * lx + 3/m - l + 2/m\right]$$

$$= -\frac{1}{lx}\sum_{t=1}^{w} v^{t/m}\, l_{x+t/m} - l_{x+(t-1)/m}$$

Si:

$$\Delta l_{x+t/m} = l_{x+t/m} - l_{x+(t-1)/m}$$

Entonces:

$$= -\frac{1}{lx}\sum_{t=1}^{w} v^{t/m}\, \Delta l_{x+t/m}$$

3.2.3. Seguro diferido de vida entera

$${}_{m/}\bar{A}_x = \int_m^{\alpha} v^t\ xPt\ \mu_{x+t}\ dt \quad (3.18)$$

3.2.4. Seguro diferido y temporal

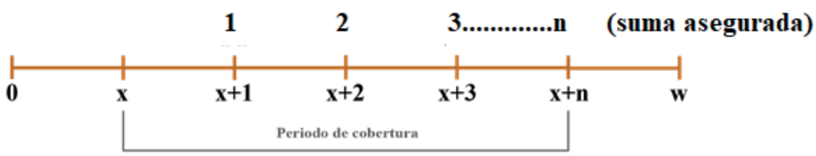
$$ {}_{m/n}\bar{A}_x = \int_m^{m+n} v^t \; xPt \;\; \mu_{x+t} \, dt \qquad (3.19) $$

3.3. Seguros variables

Ahora trabajaremos con seguros variables, nos referimos a seguros variables, cuando la suma asegurada varía durante el período de cobertura, a continuación, trabajaremos con valores actuariales de seguros de vida, cuya suma asegurada crece en progresión aritmética.

3.3.1 Valor actuarial de un seguro de vida temporal, creciente, cuya prestación consiste en el pago de 1 unidad monetaria, si la persona fallece entre x y x+1, al final del año; 2 unidades monetarias si fallece entre x+1 y x+2 y así sucesivamente.

Figura 34. Valor Actuarial IA’x:n]



La variable aleatoria asociada con esta operación es:

$$ I\xi'_{x:\,n]} $$

Donde:

$$ I\xi'_{x:\,n]} \left\{ \begin{array}{ll} 0 \quad para & nPx \\ (t+1)\, V^{t+1} & cuando\ t/qx \quad para\ t{=}0{,}1{,}2..n{-}1 \end{array} \right\} $$

$$ IA'_{x:\,n]} = \mathrm{E}[I\xi'_{x:\,n]}] = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) V^{t+1}\; t/qx \; = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)\; t/1Ax \qquad (3.20) $$

El valor de t+1 de la expresión 3.20, es la suma assegurada que crece en progresión aritmética.

Podemos escribir de otra manera la expresión 3.20:

$$IA'_{x:\,n]} = {}_{0/1}A_x + 2\,{}_{1/1}A_x + 3\,{}_{2/1}A_x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n\,{}_{n\text{-}1/1}A_x \qquad (3.21)$$

A su vez, la expresión 3.21 es igual a:

0/1Ax + 1/1Ax + 2/1Ax +………………………+ n-1/1Ax = 0/n Ax

1/1Ax + 2/1Ax +………………..……+ n-1/1Ax = 1/n-1Ax

2/1Ax+……………………..…+ n-1/1Ax = 2/n-2Ax

= 0/n Ax + 1/n-1Ax + 2/n-2Ax + ………………………+n-1/1Ax

Por lo tanto, el valor actuarial $IA'_{x:n]}$ será:

$$\sum_{t=0}^{n-1}(\,t/\,(n-t)Ax \qquad (3.22)$$

A su vez, la expresión 3.22 la podemos denotar en valores de conmutación de la siguiente manera:

$$\sum_{t=0}^{n-1}\frac{M_{x+t}-M_{x+n}}{D_x}=\frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=0}^{n-1}M_{x+t}-\sum_{t=0}^{n-1}M_{x+n}\right] \qquad (3.23)$$

Para el cálculo del valor actuarial , podemos utilizar la expresión 3.23, pero, su aplicación es algo confusa, por tanto, utilizaremos un nuevo valor de conmutación:

Valor de conmutación N°5 (Ver anexo 2)

$$R_x = \sum_{t=0}^{w} M_{x+t}$$

Utilizando el valor de conmutación número 5 y reemplazando en la expresión 3.23, el valor actuarial de un seguro variable temporal $IA'_{x:n]}$ es:

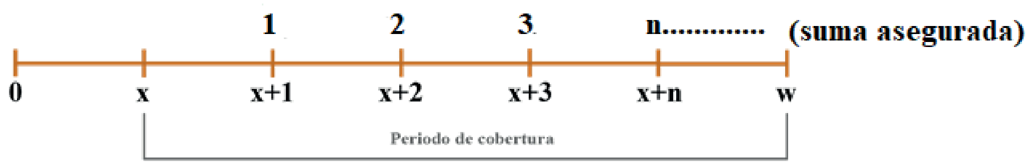
$$IA'_{x:n]} = \frac{R_x - R_{x+n} - (n * M_{x+n})}{D_x} \qquad (3.24)$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de 20 años desea contratar una cobertura de seguros de vida por 5 años; la suma asegurada crece en progresión aritmética de $20.000 por año, siendo la suma asegurada del año 1 de $20.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.
- Una persona de 50 años desea contratar una cobertura de seguros de vida por 3 años; la suma asegurada crece en progresión aritmética de $10.000 por año. Adicional se sabe que la tasa de interés técnica es del 3%, y l_{50}=10000, l_{51}=9800, l_{52}=9000, l_{53}=8470.

3.3.2. Valor actuarial de una operación de seguros variables de por vida. IAx

Figura 35. Valor Actuarial Iax



$$IAx = \mathrm{E}[(\mathrm{I}\,\xi)]\mathrm{x} = \sum_{t=0}^{w}(t+1)V^{t+1}\, t/qx = \sum_{t=0}^{w}(t+1)\; t/1Ax$$

Por lo tanto, Ix es igual a:

$$0/1Ax + 2\ 1/1Ax + 3\ 2/1Ax + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ w = 0/wAx$$

$$0/1Ax + 1/1Ax + 2/1Ax + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ w = 1/w\text{-}1Ax$$

$$1/1Ax \quad + 2/1Ax + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ w = 2/w\text{-}2Ax$$

$$2/1Ax + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ w = 3/w\text{-}3Ax$$

Utilizando la expresión anterior, diremos que el valor actuarial IAx es:

$$IAx \ = \sum_{t=0}^{w} t/1Ax \qquad (3.26)$$

Utilizando el valor de conmutación número 4 en la expresión 3.26 tenemos:

$$IAx = \sum_{t=0}^{w} \frac{M_{x+t}}{D_x} \qquad (3.27)$$

Reemplazando la expresión 3.27 con el valor de conmutación número 5, nuestro valor actuarial Ix será igual a:

$$IA_x = \frac{R_x}{D_x} \qquad (3.28)$$

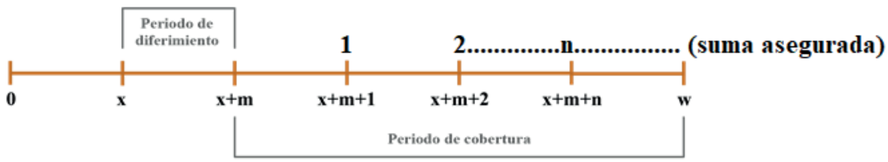
Ejercicios propuestos

- Una persona de 30 años desea contratar una cobertura de seguros de vida entera; la suma asegurada crece en progresión aritmética de $20.000 por año, siendo la suma asegurada del año 1 de $20.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.

- Una persona de 45 años desea contratar una cobertura de seguros de vida entera; la suma asegurada crece en progresión aritmética de $5.000 por año, siendo la suma asegurada del año 1 de $5.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.

3.3.3. Valor actuarial de una operación de seguros creciente en progresión aritmética, diferido m años y de vida entera. m/IAx

Figura 36. Valor Actuarial m/IAx



$$\mathrm{m/IAx} = \sum_{t=m}^{w}(t + m + 1) * V^{t+1} * t/qx \qquad (3.29)$$

Aplicando el valor de conmutación número 4 a la expresión 3.29, tenemos:

$$\sum_{t=m}^{w} t/Ax = \sum_{t=m}^{w} = \frac{M_{x+t}}{D_x} \qquad (3.30)$$

La expresión 3.30 tiene ciertas complicaciones para poderse resolver, por tanto, ahora utilizaremos el valor de conmutación número 5, dando como resultado el valor actuarial de un seguro variable, con cobertura después de m años:

$$m/IA_x = \frac{R_{x+m}}{D_x} \qquad (3.31)$$

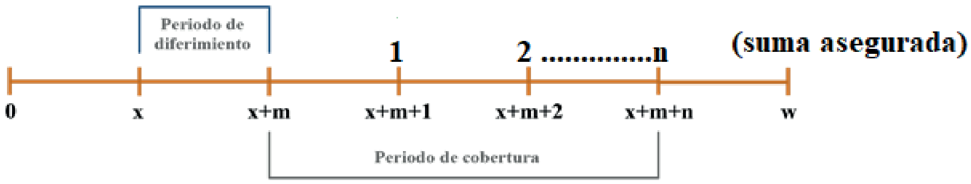
Ejercicios propuestos

- Una persona de 25 años desea contratar una cobertura de seguros de vida; la cobertura comenzará desde los 40 años. La suma asegurada crece en progresión aritmética de \$20.000 por año, siendo la suma asegurada del año 1 de \$20.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.

- Una persona de 40 años desea contratar una cobertura de seguros de vida, la cobertura empezará desde los 65 años; la suma asegurada crece en progresión aritmética de \$10.000 por año, siendo la suma asegurada del primer año del \$10.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.

3.3.4. Valor actuarial de una operación de seguros diferido m años, creciente en progresión aritmética y temporal. m/n(I)x

Figura 37. Valor Actuarial m/nIAx



Aplicando el mismo procedimiento que los valores actuariales anteriores, tenemos que el valor actuarial diferido y temporal, cuya suma asegurada crece en progresión aritmética es:

$$m/nIAx \ = \sum_{t=m}^{m+n-1} t/n-t+mAx \qquad (3.32)$$

Si a la expresión 3.32, la expresamos en valores de conmutación tenemos:

$$m/nIAx \ = \sum_{t=m}^{m+n-1} \frac{M_{x+t}-M_{x+t+m-t+n}}{D_x}$$

$$m/nIAx \ = \frac{1}{Dx}\sum_{t=m}^{m+n-1} M_{x+t}-M_{x+m+n}$$

Ahora utilizaremos el valor de conmutación número 5, para expresar el valor actuarial de un seguro de vida variable diferido y temporal.

$$_{m/n}IA_x = \frac{R_{x+m}-R_{x+m+n}-(n*M_{x+m+n})}{D_x} \qquad (3.33)$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de 20 años desea contratar una cobertura de seguros de vida por 5 años: la cobertura comenzará desde los 30 años. La suma asegurada crece en progresión aritmética de $20.000 por año, siendo la suma asegurada del año 1 de $20.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.

- Una persona de 35 años desea contratar una cobertura de seguros de vida por 20 años; la cobertura comenzará desde los 50 años. La suma asegurada crece en progresión aritmética de $20.000 por año, siendo la suma asegurada del año 1 de $20.000. ¿Cuál es la prima? Calcular utilizando la tabla de mortalidad.

- Una persona de 50 años desea contratar una cobertura de seguros de vida por 3 años; la cobertura comenzará desde los 55 años. La suma asegurada crece en progresión aritmética de $10.000 por año, siendo la suma asegurada del primer año del $10.000. Adicional, se sabe que la tasa de interés técnica es del 3% y l50=10000, l55=7800, l56=6000, l57=4670, l58=4000.

3.4. Ejercicios propuestos de fin de capítulo

1. Interpretar y expresar en símbolos de conmutación:

$$2/5A30\ ,\ A'50{:}\,\bar{6}\,|\ ,\ 15/\,A35,\ 4/3IA40,\ 4/IA40$$

2. Se considera una persona de 40 años, calcular el valor actuarial del capital de $200.000 pagadero al final del año en que acontezca el fallecimiento.

> **a.** En cualquier momento en que acaezca el suceso.
>
> **b.** Condicionado a que el suceso acaezca antes de cumplir 50 años.
>
> **c.** Condicionado a que el suceso acaezca después de los 50 años.
>
> **d.** Condicionado a que el suceso acaezca entre los 60 y 64 años.

3. Una persona de 28 años quiere contratar un plan de seguros que le proporcione los siguientes beneficios:

> **a.** En caso de fallecimiento, a sus beneficiarios, la suma asegurada de $80.000, siempre que esto suceda desde los 33 a los 40 años, en progresión aritmética de 20000 por año, comenzando con una suma de $80.000.
>
> **b.** En caso de fallecimiento en los 5 primeros años de vigencia del contrato se devuelve la prima pagada sin intereses.

Calcular la prima única.

4. Juan tiene la edad de 36 años, contrata un seguro de $50.000 pagadero al fin del año de fallecimiento, si esto ocurre después de trascurridos 15 años. Y si el fallecimiento ocurre durante los 7 primeros años, la suma asegurada será de 35.000, cuyo pago se hará al fin de los 7 años.

5. Una operación de seguros temporal por 10 años a favor de x (edad actual), proporciona las siguientes prestaciones al fallecimiento/quiebra, pagaderas al fin del año en que acaezca el suceso. Expresar en valores de conmutación.

Tabla 10. Prestaciones por fallecimiento

	Prestación por fallecimiento	Año de fallecimiento	Prestación por fallecimiento
1	8	6	5
2	8	7	5
3	7	8	4
4	6	9	2
5	6	10	2

a. Calcular el valor actuarial para una persona de 25 años que desea una cobertura de seguros con las siguientes prestaciones:

- En caso de fallecimiento durante los 5 primeros años de vigencia del contrato, se devolverá la prima pagada.

- Desde los 30 a los 65 un seguro creciente en progresión aritmética de 2000 por año; comenzando con una suma de 10.000 si el fallecimiento ocurre entre 30 y 31.

- Pasados los 65 años, la suma asegurada será de 40.000.

b. Una persona de 54 años desea un seguro de vida, para lo cual, fija una suma asegurada de $180.000 pagadero al fin del año de fallecimiento /quiebra, siempre que el suceso acaezca antes de los 58. Para resolver, tome en cuenta que la tasa de interés técnica es de 4% y los datos que proporciona la siguiente tabla de mortalidad:

Tabla 11. Tabla de mortalidad

X (edad actual)	lx (número de sobrevivientes a la edad x)	dx (número de fallecidos a la edad x)
53	1000	10
54	990	17
55	973	23
56	950	28
57	922	32
58	890	35
59	855	

Calcule el valor de la prima pura que deberá pagar la persona de 54 años para tener cobertura en caso de fallecimiento.

c. Una persona de 25 años desea contratar el siguiente plan de seguros:

- En caso de que el fallecimiento esté entre 25 y 26, se fija una suma asegurada de $3000.

- En caso de que el fallecimiento esté entre 26 y 27, se fija una suma asegurada de $5000.

- En caso de que el fallecimiento esté entre 27 y 28, se fija una suma asegurada de $7000, año en el cual se extingue el beneficio.

Utilice la tasa de interés técnica del 5% y sabiendo que: d25=30, d26=34, d27=40, d28 = 50 y que el número de sobrevivientes a la edad 25 es de 1000 personas. Calcular el valor de la prima única para la operación de seguros variables.

d. Calcular la prima única de la siguiente operación de seguros:

Una persona de 32 años desea contratar una cobertura de seguros de vida con las siguientes características:

Si fallece entre 32 y 33 años se pagará una suma de 30.000 en 33, si fallece entre 33 y 34 años se pagará una suma de 35.000 en 34, si fallece entre 34 y 35 años se pagará una suma de 40.000 en 35 y así sucesivamente hasta llegar a la edad 40, año en el cual se extingue el beneficio. Utilizar la tabla de mortalidad.

e. Calcular la prima única de la siguiente operación de seguros:

Una persona de 50 años desea contratar una cobertura de seguros de vida con las siguientes características:

Si fallece entre 55 y 56 años se pagará una suma de $10.000 en 56, si fallece entre 56 y 57 años se pagará una suma de $12.000 en 57, si fallece entre 57 y 58 años se pagará una suma de $40.000 en 58 y así sucesivamente hasta llegar a la edad 65. Desde los 65 años, la suma asegurada se mantendrá en $100.000 con cobertura de vida entera. Utilizar la tabla de mortalidad.

f. Se sabe que A_{76} = 0.80, D_{76}=400, D_{77}=360, i=3%, Calcular A_{77}

g. Una prima única para una operación de seguros de vida a favor de una persona de edad x, proporciona $10.000 durante los 20 primeros años y un desembolso sin intereses de la prima única neta si la persona fallece durante los primeros 20 años. La prima se paga al comienzo del primer año y la prestación se paga al fin del año de ocurrencia del fallecimiento. ¿Cuál es la prima única?

Capítulo 4

Valores actuariales de prestaciones en caso de supervivencia


XX01
XX02
XX03

Capítulo 4

Valores actuariales de prestaciones en caso de superviviencia

En el capítulo 3, se trabajó con valores actuariales de seguros de vida, es decir, en caso de fallecimiento, en donde el pago de la suma asegurada ocurría si fallece la persona. En este capítulo, trabajaremos con valores actuariales en caso de supervivencia, en donde los pagos o sucesión de pagos ocurren si sobrevive la persona.

A continuación, analizaremos el primer valor actuarial en caso de supervivencia, del cual, se parte para el cálculo de los valores actuariales de rentas vitalicias.

4 .1. Valor actuarial de un capital unitario, para una persona de edad x, si llega sobrevive n años, ${}_nE_x$

El símbolo nEx expresa el valor actuarial de un capital unitario pagadero transcurridos n años, con la condición de que x sobreviva a la edad x+n.

A este valor actuarial lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$ {}_nE_x = V^n * {}_nP_x \qquad (4.1) $$

En valores de conmutación la expresión 4.1 quedaría:

$$ {}_nE_x = \frac{1}{(1+i)^n} * \frac{l_{x+n}}{l_x} * \frac{V^x}{V^x} $$

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.2) $$

Ejercicios propuestos

- Para la resolución de los siguientes ejercicios, utilice la tabla de mortalidad.
    - Una persona de 65 años desea contratar una póliza que pague $100.000, en caso de que llegue con vida a los 70. Calcular la prima.

- A una persona de 45 años le interesa un seguro de vida que pague a sus beneficiarios $50.000, en caso de fallecimiento cuando sea que ocurra. Además, si sobreviviere a los 70, se le paga una suma de $5.000, si sobrevive a los 71, $10.000 y así sucesivamente hasta los 75 años.

- Calcular la prima única que tendrá que pagar una persona de edad 40, que desea recibir un pago único de $50.000, si llega con vida a la edad 50. Para este ejercicio utilizar la tasa de interés técnica del 5%. Adicional se sabe que: l40= 10000 y l50=8000

4 .2. Rentas vitalicias

Se llaman rentas vitalicias porque su pago está sujeto a la supervivencia de la persona o grupo de personas. En este apartado, se calculó el valor actuarial de un pago único si sobrevive la persona; ahora calcularemos el valor actuarial en caso de supervivencia de una sucesión de pagos anuales.

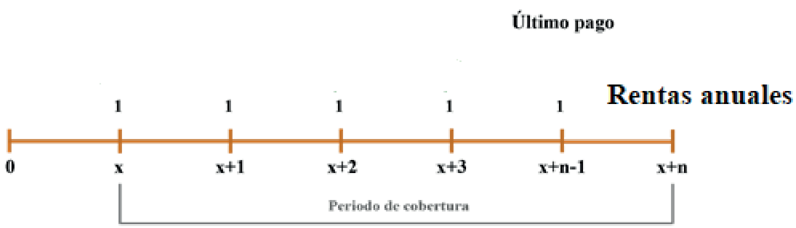
Vamos a ver dos tipos de Rentas vitalicias: anticipadas y vencidas.

4.2.1. Rentas vitalicias unitarias anuales anticipadas.

En esta sección se calculará el valor actuarial de rentas vitalicias cuyo pago comienza al inicio de cada período.

4.2.1.1. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, anticipada, temporal por n años $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Figura 38. Valor actuarial äx: n]



El valor actuarial de una renta vitalicia anticipada temporal está definida por la siguiente expresión:

$$\ddot{a}_{x:\,n]} = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots {}_{n-1}E_x \tag{4.3}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} tEx \tag{4.4}$$

Ahora, la expresión 4.4 la pasaremos a valores de conmutación:

$$\sum_{t=0}^{n-1} \frac{Dx + t}{Dx} \tag{4.5}$$

Para poder continuar con el cálculo del valor actuarial , es necesario deducir otro valor de conmutación:

Valor de conmutación N°6 (Ver anexo 2)

$$Nx = \sum_{t=0}^{w} Dx + t$$

Reemplazando la expresión 4.5 con el valor de conmutación número 6 tenemos:

$$\ddot{a}_{x:\,n]} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{4.6}$$

Ejercicios propuestos

- Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia anticipada de $4000 para una persona de 36 años de edad. La renta se pagará por 20 años.

- Una persona de 40 años desea contratar un plan de seguros y rentas vitalicias especificado de la siguiente manera:

  a. En caso de fallecimiento durante los primeros 10 años se pagará a los beneficiarios de la póliza la suma de $50.000.

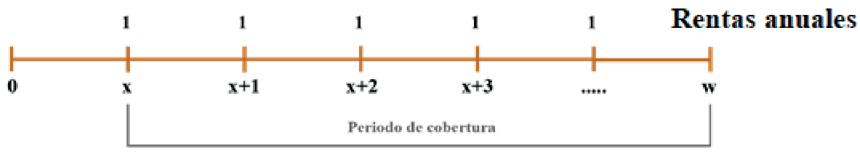
  b. Rentas anuales anticipadas de $12.000, por 10 años.

Utilizar la tabla de mortalidad.

- Una persona de edad 30 desea contratar un plan de rentas vitalicias anticipadas por 4 años, la tasa de interés a utilizar en esta operación es de 6% y las probabilidades se calcularán a base de la tabla de mortalidad. Calcular la prima única.

4.2.1.2. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, anticipada, de vida completa

Figura 39. Valor actuarial $\ddot{a}_x$



A diferencia del valor actuarial anterior, la cobertura de esta va de x (edad actual) a w (límite superior de supervivencia).

$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots_w \qquad (4.7)$$

$$= \sum_{t=0}^{w} tEx$$

$$= \sum_{t=0}^{w} \frac{Dx+t}{Dx} \qquad (4.8)$$

Siendo así y aplicando el valor de conmutación número 6 a la expresión 4.8, el valor actuarial será:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad (4.9)$$

Ejercicios propuestos

Para los ejercicios utilice la tabla de mortalidad

- Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia anticipada de $5000 anuales para una persona de 65 años. La cobertura es hasta el fallecimiento.
- Una persona de 35 años desea firmar una póliza de seguros con las siguientes coberturas:

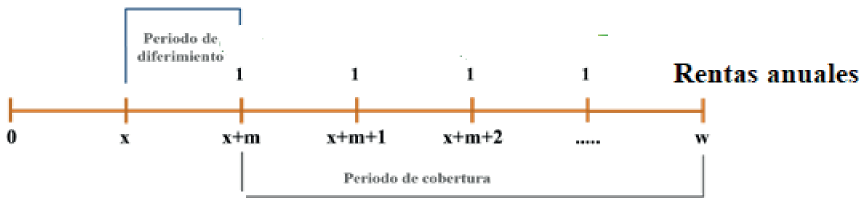
  a. Un seguro de vida creciente en progresión aritmética, con cobertura desde hoy hasta la edad 50, comenzando con una suma de $20.000 y creciendo $5000 por período.

  b. Una renta anticipada de $10.000, mientras viva. Desde hoy hasta el fallecimiento.

Calcule el valor de la prima única.

4.2.1.3. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, anticipada, diferida, de vida completa $m/\ddot{a}_x$

Figura 40. Valor actuarial $m/\ddot{a}_x$



$$m/\ddot{a}_x = {}_{m}E_x + {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + {}_{m+3}E_x + \dots\dots w$$

$$= \sum_{t=m}^{w} tEx \qquad (4.10)$$

La expresión 4.10, la podemos definir también como la diferencia de los valores actuariales: el valor actuarial de la renta vitalicia anticipada de vida entera menos el valor actuarial de la renta vitalicia anticipada temporal:

$$m/\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad (4.11)$$

Pasando a valores de conmutación tenemos:

$$m/\ddot{a}_x = \frac{Nx}{Dx} - \frac{Nx - Nx + m}{Dx}$$

$$m/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} \qquad (4.12)$$

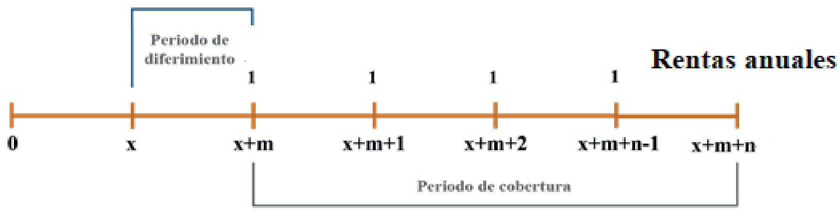
Ejercicios propuestos

- Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia anticipada de $6000 anuales para una persona de 40 años. Según las condiciones establecidas en el contrato, la renta comenzará a recibirse desde los 65 años.

- Un empleado tiene derecho a jubilarse una vez cumplidos 25 años de trabajo en el mismo lugar. El Señor Carlos lleva trabajando 12 años. La edad de Carlos es 38 años, los cálculos establecen que cuando llegue a los 25 años de trabajo tendrá derecho a recibir una renta de $3000 anuales. El empleador quiere contratar una empresa administradora de fondos y pensiones, para que le cobre hoy una prima única de tal manera que cuando el empleado llegue a la edad de jubilación, la empresa administradora de fondos le pague al empleado. Calcular el valor que tendrá que pagar el empleador el día de hoy.

4.2.1.4. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, anticipada, diferida, y temporal $m/n\ddot{a}_x$

Figura 41. Valor actuarial $m/n\ddot{a}_x$



$$m/n\ddot{a}_x = {}_{m}E_x + {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + {}_{m+3}E_x + \ldots\ldots + {}_{m+n-1}E_x$$

$$= \sum_{t=m}^{m+n-1} tEx \qquad (4.13)$$

Se lo podría calcular por complemento:

$$m/n\ddot{a}_x = m/\ddot{a}x - m{+}n/\ddot{a}x.$$

$$m/n\ddot{a}_x = \frac{Nx+n}{Dx} - \frac{Nx+m+n}{Dx}$$

$$_{m/n}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \qquad (4.14)$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de edad 30 desea contratar un plan de rentas vitalicias anticipadas con cobertura desde los 40 a los 65 años, la renta anual será de $10.000 si sobrevive. Calcular la prima única. Para este ejercicio utilice la tabla de mortalidad

- Un individuo de 45 años desea contratar una renta vitalicia anticipada con cobertura desde los 65 hasta los 70 años. La renta anual será de $15.000, y de utilizarán los siguientes valores: l_{45}=20000, l_{65}=19230, l_{66}=18000, l_{67}= 17258, l_{68}=16500, l_{69}=15984, l_{70}=15008. La tasa de interés a utilizar en esta operación será del 5%.

Ejercicios propuestos de rentas anticipadas y seguros de vida

- Una persona de x años quiere contratar un plan de jubilación que le pague: $12.000 anuales desde los 65 años. Determine el valor actuarial de la operación si: x=20, x=30 y x=50.

- Una persona de 30 años quiere una operación de seguros que le paga $100.000 si fallece antes de los 70. De lo contrario, le paga $5.000 anuales mientras viva.

- Una persona de 22 años quiere un plan de seguros que le proporcione el pago de $80.000 si fallece antes de los 65 años y rentas anuales de $3.000 desde los 65 hasta los 75, y desde los 76 en adelante las rentas serán de $6.000.

- Una persona de 20 años quiere un seguro que pague $20.000 si fallece cuando sea. Adicionalmente se devuelve la prima pagada más intereses si fallece durante los 5 primeros años de vigencia del contrato.

- Una persona de 23 años está interesada en una operación de seguros que proporcione rentas de $5.000 anuales desde los 65 a los 80 años. Pasada esta edad, rentas de $10.000 anuales. Si fallece durante los 10 primeros años de vigencia del contrato, se devuelve a los beneficiarios la prima pagada.

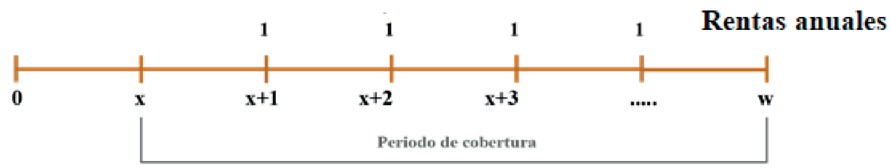
4.2.2. Rentas vitalicias vencidas

En esta sección se calculará el valor actuarial de rentas vitalicias cuyo pago comienza al fin de cada período.

4.2.2.1. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, vencida, de vida completa. a_x.

Como es una renta vencida, el primer pago se realizará en x+1, y seguirá mientras siga con vida.

Figura 42. Valor actuarial ax



$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots w$

$$= \sum_{t=1}^{w} tEx \qquad (4.15)$$

Si a la expresión 4.15 la pasamos a valores de conmutación tendremos:

$$= \sum_{t=1}^{w} \frac{Dx+t}{Dx} \qquad (4.16)$$

Por lo tanto, la expresión 4.16 es igual a:

$$a_x = \frac{Nx+1}{Dx} \qquad (4.17)$$

Ejercicios propuestos

Para los ejercicios utilice la tabla de mortalidad

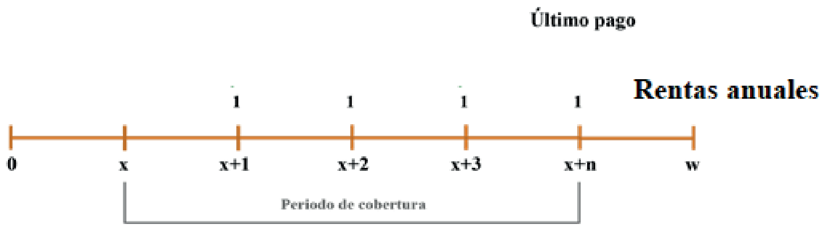
- Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia vencida de $15000 anuales para una persona de 65 años. La cobertura es hasta el fallecimiento.
- Una persona de 28 años desea firmar una póliza de seguros con las siguientes coberturas:

a. Un seguro de vida creciente en progresión aritmética, con cobertura desde hoy hasta la edad 45, comenzando con una suma de \$5.000 y creciendo \$15000 por período.

b. Una renta vitalicia vencida de \$10.000, mientras viva. Calcule el valor de la prima única.

4.2.2.2. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, vencida, temporal n años.

Figura 43. Valor actuarial $a_{x:\overline{n}|}$



$$a_{x:\overline{n}|} = {}_{1}E_x + {}_{2}E_x + {}_{3}E_x + {}_{4}E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}_{n}E_x$$

$$= \sum_{t=1}^{n} tEx = \sum_{t=1}^{n} \frac{Dx + t}{Dx} \qquad (4.18)$$

La expresión 4.18, la podemos expresar de la siguiente manera:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{Nx+1-Nx+n+1}{Dx} \qquad (4.19)$$

Ejercicios propuestos

- Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia vencida de \$5000 para una persona de 36 años de edad. La cobertura será de 20 años.

- Una persona de 45 años desea contratar un plan de seguros y rentas vitalicias especificado de la siguiente manera:

a. En caso de fallecimiento durante los primeros 15 años se pagará a los beneficiarios de la póliza la suma de \$10.000.

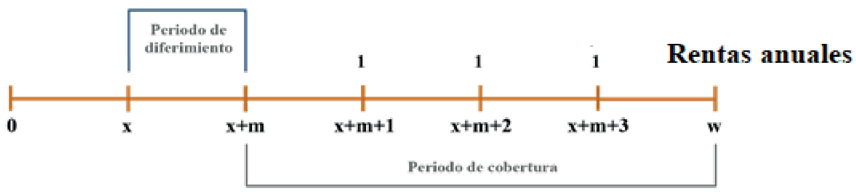
b. Rentas anuales vencidas de $12.000, por 10 años.

Utilizar la tabla de mortalidad.

- Una persona de edad 45 desea contratar un plan de rentas vitalicias vencidas por 3 años, la tasa de interés a utilizar en esta operación es de 4%, y las probabilidades se calcularán a base de la tabla de mortalidad. Calcular la prima única.

4.2.2.3. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, vencida, diferida, de vida completa.

Figura 44. Valor actuarial m/a_x



$$m/a_x = {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + {}_{m+3}E_x + {}_{m+4}E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots w$$

$$= \sum_{t=m+1}^{w} tEx \qquad (4.20)$$

La expresión 4.20 la podemos expresar como la diferencia de la renta vitalicia vencida de vida entera y la temporal

$$. = a_x - a_{x:n]}$$

Por tanto, el valor actuarial de una renta vencida unitaria anual, diferido m años y de vida entera es:

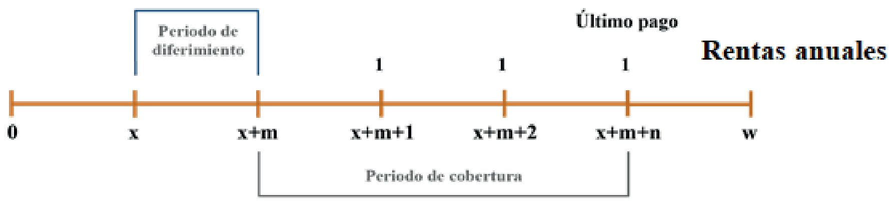
$$m/a_x = \frac{Nx+m+1}{Dx}$$

Ejercicios propuestos

Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia vencida de $12.000 anuales para una persona de 40 años. Según las condiciones establecidas en el contrato, la cobertura comenzará desde los 65 años.

4.2.2.4. Valor actuarial de una renta vitalicia anual unitaria, vencida, diferida, temporal. $_{m/n}a_x$

Figura 45. Valor actuarial $_{m/n}a_x$



Donde:

$$_{m/n}a_x = {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + {}_{m+3}E_x + {}_{m+4}E_x + \ldots\ldots + {}_{m+n}E_x$$

$$= \sum_{t=m+1}^{m+n} tEx = \sum_{t=m+1}^{m+n} \frac{Dx+t}{Dx} \qquad (4.21)$$

A la expresión 4.21 podemos calcularla como la diferencia entre dos valores actuariales temporales como se muestra a continuación:

$$_{m/n}a_x = a_{x:\,m+n]} - a_{x:\,m]}$$

$$_{m/n}a_x = \frac{Nx+m+1-Nx+m+n+1}{Dx} \qquad (4.22)$$

Ejercicios propuestos

- Una persona de edad 33 desea contratar un plan de rentas vitalicias vencidas con cobertura desde los 40 a los 65 años; la renta anual será de $10.000 si sobrevive. Calcular la prima única. Para este ejercicio utilice la tabla de mortalidad

- Un individuo de 50 años desea contratar una renta vitalicia vencida con cobertura desde los 67 hasta los 70 años. La renta anual será de $15.000 y se utilizarán los siguientes valores: $l_{50}=19000$, $l_{67}=18230$, $l_{68}=17500$, $l_{69}=16984$, $l_{70}=15952$. La tasa de interés a utilizar en esta operación será del 5%.

Ejercicios propuestos de seguros de vida, rentas anticipadas y vencidas.

- Una persona de 25 años quiere una operación de seguros que consiste en el pago de $20.000 si fallece entre los 25 y 26, $25.000 entre los 26 y 27, $30.000 si es entre los 27 y 28 y así hasta los $100.000, valor que permanece constante hasta los 70, año para el cual, se extingue el beneficio; En caso de seguir con vida, empieza a recibir rentas anuales de $10.000 de por vida.

- Una persona de 30 años desea contratar un plan de seguros que pague $50.000 si sobrevive hasta los 40, $100.000 si sobrevive a los 60 y pagos anuales de $12.000 desde los 72, de por vida.

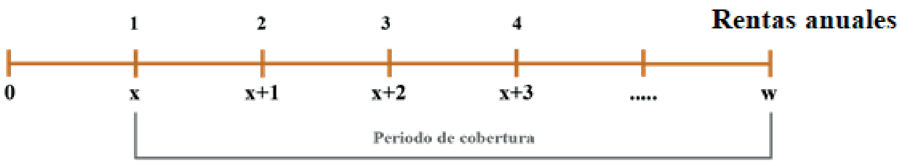
- Una persona de 45 años quiere un seguro de vida por $50.000 en caso de siniestro cuando sea que ocurra; además, si sobrevive a los 70, se le paga $5.000; si sobrevive a los 71, $10.000; si sobrevive a los 72, $15.000, y así hasta los 75 años.

4.3. Rentas vitalicias anuales, variables y anticipadas

Como en el caso de los seguros de vida variable, en donde la suma asegurada crece en progresión aritmética, las rentas vitalicias variables que veremos a continuación son cuando la renta anual crece en progresión aritmética. Ahora desarrollaremos la renta vitalicia variable anticipada.

4.3.1. Renta variable anticipada de vida completa.

Figura 46. Valor actuarial $I\ddot{a}_x$



$$I\ddot{a}_x = 1 + 2\,{}_1E_x + 3\,{}_2E_x + 4\,{}_3E_x + 5\,{}_4E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots w$$

$$= 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0/\ddot{a}_x$$

$$ {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1/\ddot{a}_x$$

$$ {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots\ldots = 2/\ddot{a}_x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por lo tanto $(I\ddot{a})_x$ será igual a:

$$\sum_{t=0}^{w} t/\ddot{a}x = \sum_{t=0}^{w} \frac{Nx+t}{Dx} \qquad (4.23)$$

La aplicación de la expresión 4.23 para la resolución del valor actuarial es un tanto complicada, para lo cual, es necesario ver un nuevo valor de conmutación:

Valor de Conmutación #7 (Ver anexo 2)

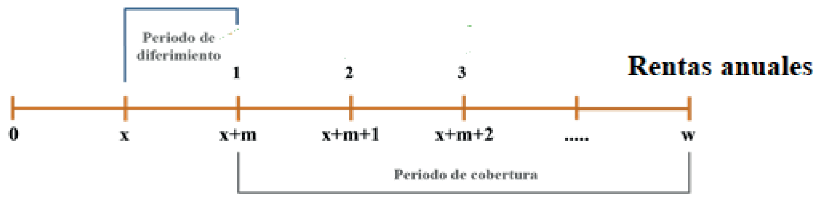
$$S_x = \sum_{t=0}^{w} Nx + t$$

Aplicando el valor de conmutación # 7 a la expresión 4.23, el valor actuarial de una renta vitalicia anticipada variable de por vida será:

$$I\ddot{a}_x = \frac{Sx}{Dx} \qquad (4.24)$$

4.3.2. Renta variable, anticipada, diferida, de vida completa. $_{m/}I\ddot{a}_x$

Figura 47. Valor actuarial $_{m}/\ I\ddot{a}_x$



$$_{m/}I\ddot{a}_x = {}_mE_x + 2\ {}_{m+1}E_x + 3\ {}_{m+2}E_x + 4\ {}_{m+3}E_x + \ldots\ldots w$$

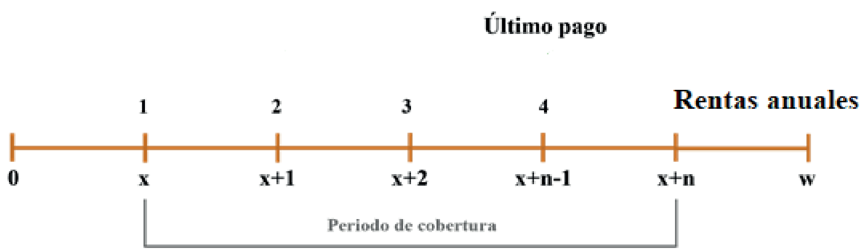
$$= \sum_{t=m}^{w} m/\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{w} \frac{Nx+m}{Dx} \qquad (4.25)$$

Si a la expresión 4.25 le aplicamos el valor de conmutación número 7, el valor actuarial $_{m/}I\ddot{a}_x$, será igual a:

$$_{m/}I\ddot{a}_x = \frac{Sx+m}{Dx} \qquad (4.26)$$

4.3.3. Renta variable, anticipada, temporal. $I\ddot{a}_{x:n|}$

Figura 48. Valor actuarial $I\ddot{a}_{x:n|}$



$$I\ddot{a}_{x:n|} = 1 + 2\,{}_1E_x + 3\,{}_2E_x + 4\,{}_3E_x + 5\,{}_4E_x + \ldots\ldots n\,{}_{n-1}E_x$$

$$= 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots + {}_{n-1}E_x = {}_{0/n}\ddot{a}_x$$

$${}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots + {}_{n-1}E_x = {}_{1/n-1}\ddot{a}_x$$

$${}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots + {}_{n-1}E_x = {}_{2/n-2}\ddot{a}_x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + {}_{n-1}E_x = {}_{n-1/1}\ddot{a}_x$$

$$= {}_{0/n}\ddot{a}_x + {}_{1/n-1}\ddot{a}_x + {}_{2/n-2}\ddot{a}_x + \ldots\ldots + {}_{n-1/1}\ddot{a}_x =$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} t/\,n - t\ddot{a}_x$$

Por lo tanto, el valor actuarial de una renta vitalicia anticipada temporal creciente en progresión aritmética será:

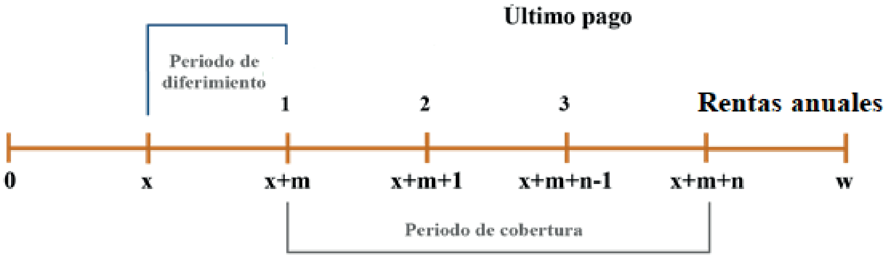
$$\sum_{t=0}^{n-1} t/\,n - t\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(Nx+t)\ - (Nx+n)}{Dx} \qquad (4.27)$$

Si a la expresión 4.27 le aplicamos el valor de conmutación número 7, el valor actuarial $I\ddot{a}_{x:n|}$ quedará:

$$I\ddot{a}_{x:n|} = \frac{(Sx) - (Sx+n) - (nNx+n)}{Dx} \qquad (4.28)$$

4.3.4. Renta variable, anticipada, diferida y temporal. ${}_{m/n}I\ddot{a}_x$

Figura 49. Valor actuarial ${}_{m/n}I\ddot{a}_x$



$${}_{m/n}I\ddot{a}_x = {}_mE_x + 2\,{}_{m+1}E_x + 3\,{}_{m+2}E_x + 4\,{}_{m+3}E_x + \dots\dots + n\,{}_{m+n-1}E_x$$

Aplicando las deducciones realizadas en valores actuariales anteriores quedaría:

$${}_{m/n}I\ddot{a}_x = \frac{(Sx+m)-(Sx+m+n)-(nNx+m+n)}{Dx} \qquad (4.29)$$

Ejercicios propuestos

1. A una persona de 26 años le interesa un plan de jubilación que empiece pagando $5.000 a los 65 años, $7.000 a los 66, $9.000 a los 67 y así mientras viva.

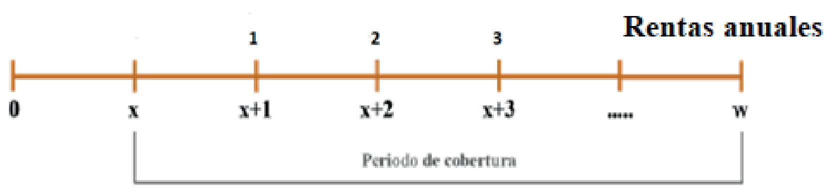
2. A una persona de 29 años le interesa una operación de seguros que consiste en un seguro de vida que pague $80.000 si esto ocurre antes de los 60 años; si sobrevive a los 40 años, recibe $50.000. Además, se tiene un plan de jubilación con una renta de $800, mensual anticipado desde los 68 años en adelante. Adicionalmente a esto, una bonificación de $1000 semestral anticipada, desde los 70 años y un pago anual adicional anticipado de $2000 desde los 75 años.

3. A una persona de 26 años le interesa un plan de jubilación que empieza pagando $5000 a los 65, $7000 a los 66, $9000 a los 67 y así sucesivamente mientras viva.

4.4. Rentas vitalicias anuales variables y vencidas

4.4.1. Renta variable Vencida de vida completa.

Figura 50. Valor actuarial Ia_x



$$Ia_x = 1\,{}_1E_x + 2\,{}_2E_x + 3\,{}_3E_x + 4\,{}_4E_x + \ldots\ldots\ldots w$$

$$= \quad 1\,{}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots = 0/a_x$$

$$ {}_2E_x + {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots = 1/a_x$$

$$ {}_3E_x + {}_4E_x + \ldots\ldots\ldots = 2/a_x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por lo tanto Ia_x será igual a:

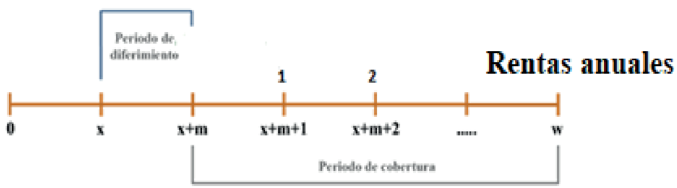
$$\sum_{t=0}^{w} t/a_x = \sum_{t=0}^{w} \frac{Nx + t + 1}{Dx} \qquad (4.30)$$

Aplicando el valor de conmutación # 7, a la expresión 4.30, el valor actuarial de una renta vitalicia vencida variable de por vida será:

$$a_x = \frac{Sx+1}{Dx} \qquad (4.31)$$

4.4.2. Renta variable, Vencida, diferida, de vida completa. m/

Figura 51. Valor actuarial $_m/Ia_x$



$$_m/Ia_x = 1\,{}_{m+1}E_x + 2\,{}_{m+2}E_x + 3\,{}_{m+3}E_x + 4\,{}_{m+4}E_x + \ldots\ldots\ldots w$$

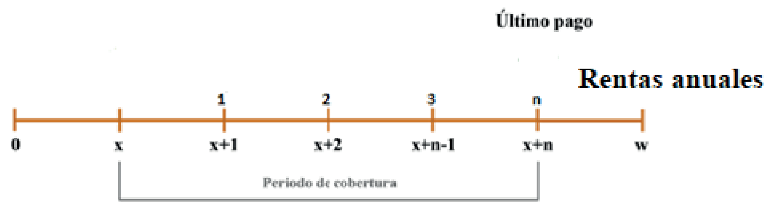
$$= \sum_{t=m}^{w} m/a_x = \sum_{t=m}^{w} \frac{Nx + m + 1}{Dx} \qquad (4.32)$$

Aplicando el valor de conmutación # 7, a la expresión 4.32, el valor actuarial de una renta vitalicia vencida variable diferida y de vida entera será:

$${}_{m/}Ia_x = \frac{Sx+m+1}{Dx} \qquad (4.33)$$

4.4.3. Renta variable, anticipada, temporal. $Ia_{x:n|}$

Figura 52. Valor actuarial $Ia_{x:n|}$



$$Ia_{x:n|} = {}_1E_x + 2\,{}_2E_x + 3\,{}_3E_x + 4\,{}_4E_x + \ldots\ldots + n\,{}_nE_x$$

$$= {}_{0/n}a_x + {}_{1/n\text{-}1}a_x + {}_{2/n\text{-}2}a_x + \ldots\ldots + {}_{n\text{-}1/1}a_x$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} t/\,n - ta_x$$

Por lo tanto, el valor actuarial de una renta vitalicia anticipada temporal creciente en progresión aritmética será:

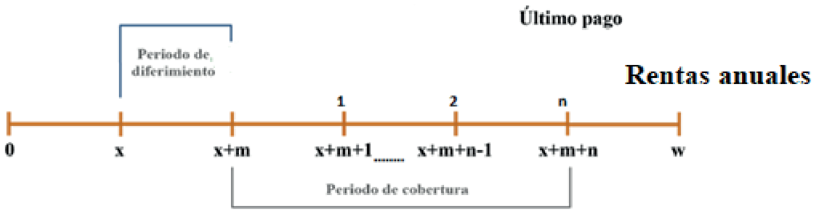
$$\sum_{t=0}^{n-1} t/\,n - ta_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(Nx+t+1) - (Nx+n+1)}{Dx} \qquad (4.34)$$

Aplicando el valor de conmutación # 7, a la expresión 4.34, el valor actuarial de una renta vitalicia vencida temporal será:

$$Ia_{x:n|} = \frac{(Sx+1) - (Sx+n+1) - (nNx+n+1)}{Dx} \qquad (4.35)$$

4.4.4. Renta variable, anticipada, diferida y temporal. ${}_{m/n}Ia_x$

Figura 53. Valor actuarial ${}_{m/n}Ia_x$



$${}_{m/n}Ia_x = {}_{m+1}E_x + 2\,{}_{m+2}E_x + 3\,{}_{m+3}E_x + 4\,{}_{m+4}E_x + \ldots\ldots + n\,{}_{m+n}E_x$$

Aplicando las deducciones realizadas en valores actuariales anteriores quedaría:

$${}_{m/n}Ia_x = \frac{(Sx+m+1)-(Sx+m+n+1)-(nNx+m+n+1)}{Dx} \qquad (4.36)$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular el valor actuarial de una renta anual anticipada de 5000 que crece en progresión aritmética por 5 años; usar la tasa de interés técnica del 4%. La edad actual de la persona es de 50 años.

2. Una persona de 35 años desea recibir rentas vitalicias crecientes en progresión aritmética vencidas, la cobertura empieza desde los 65 años. El valor de la primera renta será de 10.000. Calcular la prima.

3. Una persona de 45 años desea contratar un plan de rentas vitalicias de acuerdo a la siguiente estructura:

a. Si llega con vida a los 70 años, recibirá un pago de 50.000.

b. Llegado con vida a la edad 75, comenzará a recibir rentas anuales de 120000 que crecen en progresión aritmética; el período de cobertura de la renta vitalicia será de 0 años.

Calcular la prima única.

4. Una persona de 35 años desea contratar el siguiente plan de rentas vitalicias vencidas:

a. Desde hoy comenzará a recibir rentas de 10000 anuales por 10 años.

b. Después del período del punto *a*, las rentas crecerán 10000 por año, de vida entera.

NOTA: La suma asegurada del primer año de la segunda cobertura será 20.000.

4.5. Valores actuariales de rentas vitalicias fraccionadas

Hasta ahora hemos supuesto que las rentas vitalicias se pagan cada año de manera anticipada o vencida. En la práctica, estas se pagan en períodos inferiores a un año: mensual, trimestral o semestral. En el caso de la pensión por jubilación, por ejemplo, es una renta vitalicia anticipada cuya frecuencia de pago es mensual.

4.5.1. Rentas vitalicias fraccionadas vencidas

En la práctica, las rentas de supervivencia frecuentemente se pagan mensualmente, trimestralmente, semestralmente, etc. En la siguiente sección, veremos el cálculo de valores actuariales de rentas vitalicias fraccionadas. A diferencia de las rentas vitalicias anuales, en la nomenclatura de las rentas vitalicias fraccionadas aparece un superíndice (m), que significa.

4.5.1.1. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al final de cada m – ésimo de año mientras sobreviva la persona de edad x. a_x^m.

$$a_x^m = \frac{1}{m}\left({}_{1/m}E_x + {}_{2/m}E_x + {}_{3/m}E_x + {}_{4/m}E_x + \ldots\ldots\ldots + {}_{1}E_x + {}_{1+1/m}E_x + {}_{1+2/m}E_x + {}_{1+3/m}E_x + {}_{1+4/m}E_x + \ldots\ldots\ldots + {}_{n+t/m}E_x\right)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{w} t/mEx$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{w} v^{t/m} * \ t/mPx$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{w} \frac{Dx + t/m}{Dx}$$

$$= \frac{1}{m}\frac{1}{Dx}\sum_{t=1}^{w} Dx + t/m$$

Tomando el valor aproximado a manera de ejemplo:

$$_{n+t/m}E_x \approx {}_nE_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}E_x - {}_nE_x\right)$$

Por ejemplo:

$$_{10.7}E_x \approx {}_{10}E_x + 0{,}70\left({}_{11}E_x - {}_{10}E_x\right)$$

Entonces se tiene:

$$\sum_{t=1}^{m} \mathbf{n+t/mE} = \sum_{t=1}^{m} nEx + \frac{t}{m}(n+1Ex - nEx)$$

$$\text{m nEx} + \frac{m+1}{2}(\text{n+1Ex} - \text{nEx})$$

$$\frac{m-1}{2}\,\text{nEx} + \frac{m+1}{2}\text{n+1Ex}$$

Entonces:

Por lo tanto, $ax^{(m)}$ será igual a:

$$\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} n + t/mEx =$$

$$\frac{m-1}{2m}nEx + \frac{m+1}{2m}n + 1Ex$$

$$\sum_{n=0}^{w} \frac{m-1}{2m}\ddot{a}_x + \frac{m+1}{2m}a_x$$

$$= \frac{m-1}{2m}a_{x+1} + \frac{m+1}{2m}a_x$$

$$\mathbf{a_x^{(m)}} = \mathrm{a_x} + \left(\frac{\mathrm{m}-1}{2\mathrm{m}}\right) \qquad (4.37)$$

4.5.1.2. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al final de cada m – ésimo de año, diferida, mientras sobreviva la persona de edad x. n/ax(m)

$$_{n/}a_x^{(m)} = nEx * a_{x+n}^{(m)} = nEx\ \left(a_{x+n} + \frac{m-1}{2m}\right)$$

$$_{n/}a_x^{(m)} = {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}{}_nE_x \qquad (4.38)$$

4.5.1.3. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al final de cada m – ésimo de año, temporal, mientras sobreviva la persona de edad x. a(m)x:n

Se puede calcular la diferencia entre el de vida entera y el diferido de vida entera.

$$a^{(m)}_{x:n} = a_x^{(m)} - {}_{n/}a_x^{(m)}$$

$$a^{(m)}_{x:n} = a_{x:n} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x) \qquad (4.39)$$

4.5.1.4. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al final de cada m – ésimo de año, diferida y temporal, mientras sobreviva la persona de edad x. n/max(m)

Se lo puede calcular con la diferencia entre dos rentas fraccionadas temporales.

$$_{n/k}a_x^{(m)} = a^{(m)}_{x:n+k} - a^{(m)}_{x:n} \qquad (4.40)$$

o

$$_{n/k}a_x^{(m)} = {}_{n/}a_x^{(m)} - {}_{n+k/}a_x^{(m)} \qquad (4.41)$$

Tanto la ecuación 4,40 como la 4,41 son iguales; la primera, está planteada en términos de rentas temporales; mientras que, la segunda, está planteada en términos de rentas diferidas de vida entera.

Deducción

Utilizando la ecuación 4.41 tenemos:

$$_{n/k}a_x^{(m)} = {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x - \left({}_{n+k/}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_{n+k}E_x\right)$$

$$= {}_{n/k}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_{n+k}E_x$$

$$= {}_{n/k}a_x + \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_x - {}_{n+k}E_x\right) \qquad (4.42)$$

Ejercicios propuestos

1. ¿Cuál es el valor actual actuarial de una renta que desea recibir una persona de 60 años, de $500 mensuales vencidas hasta su fallecimiento?; utilizar la tabla actuarial, utilizar la tasa del 4%.

2. ¿Cuál es el valor actual actuarial de una renta que desea recibir una persona de 45 años, de $1500 mensuales vencidas por 20 años?; utilizar la tabla actuarial, utilizar la tasa del 4%.

3. Una persona de 55 años quiere saber la prima que tendrá que pagar, por una renta vitalicia trimestral, con cobertura por 10 años, comenzado desde los 60; utilizar la tasa del 4%.

4.5.2. Rentas vitalicias fraccionadas anticipadas

4.5.2.1. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al inicio de cada m – ésimo de año, mientras sobreviva la persona de edad x. $\ddot{a}_x^{(m)}$

Será igual a:

$$= \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{w} t\,/\,mEx$$

$$= \frac{1}{m} v^{\frac{t}{m}} * \frac{t}{m} Px$$

$$= \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$= \frac{1}{m} + a_x \frac{m-1}{2m}$$

$$= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \qquad (4.43)$$

4.5.2.2. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al inicio de cada m – ésimo de año, diferida, mientras sobreviva la persona de edad x. $_{k/}\ddot{a}_x^{(m)}$

$$_{k/}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_{k/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_kE_x$$

$$_{k/}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_{x+k} - \frac{m-1}{2m}D_{x+k}}{Dx} \qquad (4.44)$$

4.5.2.3. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al inicio de cada m – ésimo de año, temporal, mientras sobreviva la persona de edad x. $\ddot{a}^{(m)}{}_{x:n}$

$$\ddot{a}^{(m)}{}_{x:n} = \ddot{a}^{(m)}{}_{x:n} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

$$\ddot{a}^{(m)}{}_{x:n} = \frac{Nx - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(Dx - Dx+n)}{Dx} \qquad (4.45)$$

4.5.2.4. Valor actuarial de una renta vitalicia de 1 unidad monetaria por año pagadera por entregas de 1/m al inicio de cada m – ésimo de año, diferida y temporal, mientras sobreviva la persona de edad x. $_{k/n}\ddot{a}_x^{(m)}$.

$$_{k/n}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_{k/n}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}({}_kE_x - {}_{n+k}E_x)$$

$$_{k/n}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{Nx+k - Nx+k+n - \frac{m-1}{2m}(Dx+k - Dx+k+n)}{Dx} \qquad (4.46)$$

Ejercicios propuestos

1. Una persona de 30 años quiere un plan de jubilación que le pague \$1000 mensual desde los 65 años. Determine la prima.

2. Una persona de 25 años quiere un plan de jubilación que pague \$1000 mensual desde los 65 años. Determine la prima.

3. Interpretar y expresar en símbolos de conmutación las siguientes funciones:

a. $^{6}/\ddot{a}_{30}$

b. $_{7/12}\ddot{a}_{34}^{(4)}$

c. $120^{*}\,\ddot{a}_{35:15}{}^{(12)}$

d. ${}_{21/4}\ddot{a}_{40}{}^{(2)}$

5. Una empresa que lleva funcionando 40 años, dispone de la siguiente información:

a. El valor actuarial de 200 unidades monetarias pagaderas el primero de enero de 2005; si la empresa sigue funcionando es de 72 unidades monetarias.

b. La prima única neta de una renta de 100 unidades monetarias, pagaderas anualmente, si sigue funcionando la empresa durante 10 años, comenzando el primero de enero de 1996, es de 841 unidades monetarias.

c. La prima única neta de una anualidad de 1000 unidades monetarias pagadera trimestralmente a la empresa, durante 10 años desde el primero de enero de 1995, es igual a unidades monetarias.

Ejercicios propuestos de fin de capítulo

1. Una persona de edad 45 desea contratar el siguiente plan de seguros y rentas vitalicias:

a. Si fallece entre los 45 y 46 la suma asegurada será de 20.000; si fallece entre los 46 y 47, la suma será de 25000; si fallece entre los 47 y 48, la suma será de 30000; la suma seguirá creciendo en progresión de 5000 por año hasta la edad 55.

b. Después de la cobertura de (a) la suma asegurada se mantendrá en 100000.

c. Adicional, si llega con vida a la edad 65, comenzará a recibir rentas vitalicias de 5000 por año, recibiendo la última renta si llega con vida a la edad 85.

Calcular la prima

2. Calcular la Prima que tendrá que pagar una persona de 50 años que desea contratar el siguiente plan de seguros y rentas vitalicias:

a. Si fallece durante los 5 primeros años de vigencia del contrato, una suma de 20000 creciente la progresión aritmética; después de este período, la suma crecerá 10000 por año, manteniendo la progresión de la cobertura anterior.

b. Si llega con vida a la edad 70, recibirá un pago único de 50000.

3. Calcular la Prima que tendrá que pagar una persona de 50 años que desea contratar el siguiente plan de rentas vitalicias: rentas de 3000 creciente en progresión aritmética por 3 años; calcular con una tasa de 5,25%.


XX01
XX02
XX03

Capítulo 5

Valores actuariales a primas netas


XX01
XX02
XX03

Capítulo 5

Valores actuariales a primas netas

Si la pérdida del asegurador es como la variable aleatoria asociada al valor financiero actual de las prestaciones que debe pagar el asegurador, menos la variable aleatoria asociada al valor financiero actual de las primas que debe pagar el asegurado. Por lo tanto, el principio de equivalencia actuarial visto en la primera parte de este texto se expresa así:

$$E(\lambda) = 0 \qquad (5.1)$$

Es decir, la pérdida esperada del asegurador es 0, la expresión 5.1 puede escribirse de la siguiente manera:

E[Valor financiero actual de las prestaciones
- Valor actual de la primas netas] = 0

Siguiendo con la nomenclatura expuesta en la sección 1.6 en donde:

$$\pi = E(\xi)$$

Donde: (ξ) está asociada al valor financiero actual de las prestaciones previstas a cargo del asegurador. Mientras que, el pago de la prima puede acordarse al momento de la firma del contrato de seguros, hacerlo una vez al inicio. En tal caso diremos que la póliza está liberada mediante el pago de una prima única.

Cuando el pago de la prima no se efectúa una sola vez (*prima única*) sino se realizan pagos anuales, a estos pagos se les llama *primas netas*, representadas por la letra Px. Si la frecuencia de pagos fuera menor a un año, la representaremos como P(m), siendo m el número de períodos en los que se ha fraccionado el año.

Se considera que los pagos que hace el asegurado a la compañía de seguros son anticipados (pues, para que el asegurador comience a asumir riegos es necesario pagar una prima); mientras que, el pago que realiza el asegurador es vencido (pago al fin del año de fallecimiento).

Hasta este punto, hemos calculado el valor de prima única, pero, en la práctica no pasa eso; los aseguradores cobran primas anuales, mensuales, trimestrales, semestrales, etc. Por tal motivo, veremos en esta sección cómo calcularlas.

5.1. Valor actuarial de primas netas de seguros de vida

Para un seguro de vida completa Ax, sea Px el pago anual mientras sobreviva, por lo tanto, el valor actuarial de esta prima neta es:

$$P_x \ddot{a}_x = A_x$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \qquad (5.2)$$

Para un seguro temporal quedaría:

$$P_{x;n} \ddot{a}_{x:n} = A^1_{x:n}$$

$$P_{x;n} = \frac{A^1_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

$$P_{x;n} = \frac{Mx - Mx + n}{Nx - Nx + n} \qquad (5.3)$$

Para un valor actuarial de supervivencia: 1 = nEx

$$P_{x;n} 1 \ddot{a}_{x:n} = \mathrm{nEx}$$

$$P_{x;n} 1 = \frac{\mathrm{nEx}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

$$P_{x;n} 1 = \frac{\mathrm{Dx+n}}{Nx - Nx+n} \qquad (5.4)$$

Para un seguro mixto: Seguro de vida temporal y valor actuarial en caso de supervivencia:

$$P_{x;n} = \frac{\mathrm{Mx{-}Mx{+}n{+}\ Dx{+}n}}{Nx - Nx+n} \qquad (5.5)$$

5.2. Primas fraccionadas

Cuando el asegurado hace pagos *m* veces al año, si m=12, la prima es mensual, si m=2, se dice que el pago de la prima es semestral, etc.

Estas primas fraccionadas pueden ser de dos tipos:

a. Prima fraccionada con carácter liberatorio: El asegurador no descuenta de la indemnización las primas fraccionadas no pagadas el resto del año de fallecimiento.

b. Prima fraccionada sin carácter liberatorio: El asegurador descuenta de la indemnización las primas fraccionadas no pagadas durante el resto del año de fallecimiento.

NOTA: En este libro nos enfocaremos en la primera clasificación.

Prima fraccionada con carácter liberatorio:

De vida entera:

$$P_x^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} = A_x$$

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}} \qquad (5.6)$$

Temporal:

$$P_{x:n}^{(m)1}\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = A_{x:n}^{1}$$

$$P_{x:n}^{(m)1} = \frac{A_{x:n}^{1}}{\ddot{a}_{x:n}^{(m)}}$$

En valores de conmutación:

$$P_{x:n}^{(m)1} = \frac{Mx - Mx + n}{Nx - Nx + n - \frac{m-1}{2m}(Dx - Dx + n)} \qquad (5.7)$$

Temporal y de supervivencia (mixto):

$$P_{x:n}^{(m)} = \frac{Ax:n}{\ddot{a}_{x:n}^{(m)}}$$

En valores de conmutación:

$$P_{x:n}^{(m)} = \frac{Mx - Mx + n + Dx + n}{Nx - Nx + n - \frac{m-1}{2m}(Dx - Dx + n)} \tag{5.8}$$

5.3. Reservas técnicas de seguros

Las reservas técnicas se deben reflejar en el balance de las compañías de seguros y reaseguros en el pasivo y servirán para atender a las contingencias derivadas de los contratos de seguros que emitan, así como de desviación en la siniestralidad. Constituir estas reservas es de carácter obligatorio para toda compañía de seguros y reaseguros establecida en el Ecuador (Superintendencia de Compañías Valores y Seguros, 2020).

En el mercado ecuatoriano la ley pide a las compañías de seguros y reaseguros establecer reservas de:

a. Reserva de **riesgos** en curso

b. Reservas por insuficiencia de primas

c. Reserva para siniestros pendientes avisados

d. Reserva para siniestros ocurridos y no reportados

e. Reservas matemáticas

f. Reservas relacionadas con los contratos de seguros de vida

g. Reservas de desviación de siniestralidad

Toda compañía de seguros y reaseguros, para otorgar una cobertura, debe estar en la capacidad financiera de afrontar las pérdidas potenciales mientras dure la vigencia de la póliza de seguros emitida.

Es importante distinguir entre dos tipos de siniestros:

a. Siniestros reportados y que están en proceso de ajuste y liquidación

b. Siniestros ocurridos, pero, no reportados

Los costos de los siniestros son reconocidos cuando ocurren; en consecuencia, la reserva técnica de obligaciones pendientes debe incluir:

- Los costos de siniestros reportados y que están en proceso de liquidación.

- Una estimación de los costos de siniestros ocurridos, pero, no reportados. Esta reserva será constituida por cada siniestro.

Para el cálculo de la reserva de siniestros avisados será necesario sumar:

Total, de reclamaciones reportadas y parcialmente pagadas, el total de reclamaciones incurridas, pero, no suficientemente reportadas y gastos derivados del pago de siniestros. Para establecer esta reserva la compañía de seguros deberá conocer la ocurrencia del siniestro.

Para el cálculo de reservas de siniestros ocurridos y no reportados no se considerará para el cálculo, los montos de recuperación ni salvamento.

5.4. Ejercicio propuesto

1. Determinar en símbolos de conmutación la prima anual neta pagadera cada 4 meses durante 20 años que proporciona una renta diferida de $15 mensuales, correspondientes a una empresa que lleva funcionando 30 años y cuyo primer pago se realiza al fin de los 50 años.


XX01
XX02
XX03

Capítulo 6

Tipología de coberturas


XX01
XX02
XX03

Capítulo 6

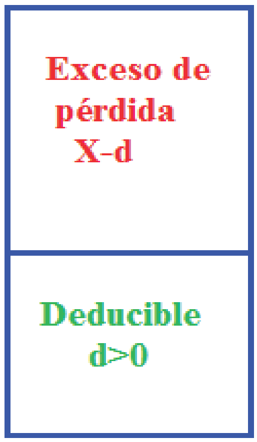
Tipología de coberturas

Cuando hablamos de cobertura nos referimos al grado de reconocimiento de la pérdida, es decir, la responsabilidad máxima del asegurador. En la práctica no siempre existe una cobertura del 100% de la pérdida, sino que las coberturas son parciales.

Exceso de pérdida

Existe un contrato en que se especifica un deducible equivalente a *d*, si una pérdida de magnitud ocurre como un evento aleatorio discreto o continuo *X*. El asegurador solo asumirá el exceso de perdida sobre *d*. La estructura de pagos será:

Figura 54. Estructura de pagos



Lo que efectivamente pagará el asegurador en el caso continuo viene dado por:

$$E(X) = \int_d^{\alpha} (x - d) f(x) dx \qquad (6.1)$$

Si integramos por partes y aplicando la ecuación diferencial

$$E(Y) = \int_d^{\alpha} 1 - f(x) dx \qquad (6.2)$$

Esto es el valor esperado de la pérdida expresado en función de distribución acumulativa de supervivencia.

Si X~uniforme (1,9),donde d=3

$$f(x) = \frac{1}{8}$$

Según las condiciones planteadas, el criterio de pago será:

$$x \in (1,3), el\ pago\ será\ de\ 0; Y = 0$$

$$x \in (3,9), el\ pago\ será\ de\ Y - 3$$

Siendo así la función de distribución será:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{8}dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{8}t\Big]_{1}^{x} = \frac{x}{8} - \frac{1}{8}$$

$$E(Y) = \int_{d}^{\alpha} 1 - (\frac{x-1}{8})dx$$

$$E(Y) = \int_{3}^{9} \frac{8 - x + 1}{8})dx$$

$$E(Y) = \frac{1}{8}\int_{3}^{9} 9 - x\ dx$$

$$E(Y) = \frac{1}{8} * 9x - \frac{x^2}{2}\Big|_{3}^{9}$$

$$E(Y) = \frac{1}{8} * \left(9(9) - \frac{9^2}{2}\right) - \left(9(3) - \frac{3^2}{2}\right) = 2.25$$

Tipos de deducibles

Tipo franquicia

Se define las variables Y, X y d

$$Y = \begin{cases} 0 \; si \; X \leq d \\ X \; si \; X > d \end{cases} \qquad (6.3)$$

El valor esperado de la pérdida es:

$$E(Y) = \int_{d}^{\infty} x * f(x)dx \qquad (6.4)$$

Tomando los datos del ejercicio anterior:

$$E(Y) = \int_{3}^{9} x * \frac{1}{8} dx = \frac{x^2}{16}\Big|_{3}^{9} = 4.50 \qquad (6.5)$$

Deducible tipo prorrateo

Se pretende reconocer un valor de pérdida proporcional al prorrateo del excedente de la pérdida sobre el deducible básico. Existen dos límites: $d_1 \; y \; d_2; \; d_2 > d_1 > 0$

$$Y = \left(d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x-d_1}{d_2-d_1} \\ x \end{bmatrix} si \; d_1 \begin{cases} x \leq d_1 \\ < x \leq d_2 \\ x > d_2 \end{cases} \right)$$

$$\Delta d = d_2 - d_1$$

$$d_2 > d_1$$

$$\frac{d_2}{d_2 - d_1} > 1 con \; d_1 > 0 \qquad (6.6)$$

La lógica obedece a la teoría de las distribuciones truncadas, lo cual, ocurre cuando se desconocen los pagos asociados a la cola inferior de las distribuciones. En el truncamiento se desconocen las pérdidas por debajo de los deducibles, mas no su frecuencia; es decir, se conoce la frecuencia mas no la severidad.

Límite de pagos

Es el pago máximo que el asegurador está dispuesto a pagar en un reclamo. Su estructura será:

$$Y = \begin{cases} X \; si \; X \leq M \\ M \; si \; X > M \end{cases} \qquad (6.7)$$

En este caso, el valor esperado de la pérdida pagada por el seguro será:

$$E(Y) = \int_0^M xf(x)dx + M\int_M^\alpha M\, f(x)dx \qquad (6.8)$$

Si combinamos un exceso de pérdida, con un límite máximo de cobertura, teniendo un deducible d y un límite máximo M, quedará:

$$Y = \begin{cases} 0 \; si \; X \leq d \\ x - d \; si \; d < x < M \\ M - d \; si \; X > M \end{cases} \qquad (6.9)$$

El valor esperado será:

$$E(Y) = \int_d^M (x-d)f(x)dx + (M-d)(1-F(x)) \qquad (6.10)$$

Capítulo 7

Seguros sociales y colectivos (sistema de reparto y capitalización)


XX01
XX02
XX03

Capítulo 7

Seguros sociales y colectivos (sistema de reparto y capitalización)

Hasta este momento, nos hemos enfocado en el cálculo de los valores actuariales de seguros y rentas vitalicias individuales. Recordemos que su valor actuarial debe guardar el principio de equivalencia, que viene dado por la expresión vista en la sección 1.6:

$$\Pi = P + Pe + c$$

En los seguros sociales y colectivos se mantiene este mismo principio, el cual, en este caso, lo llamaremos *principio de equivalencia colectiva*, que hace referencia a mantener un equilibrio entre las aportaciones y las prestaciones.

$$\text{Aportaciones} = \text{Prestaciones}$$

Bajo este principio de equivalencia colectiva podemos considerar tres aspectos:

1. El colectivo: Grupos demográficos abiertos con cierta estructura.

2. Equidad: En ocasiones se responde a un principio social más que individual, por ejemplo, aquellos que estén próximos a jubilarse necesitarán aportaciones del grupo, ya que con sus aportaciones no llegan a cubrir sus derechos reconocidos por ley.

3. Salario: Tanto aportaciones como prestaciones se calculan a base del salario.

Hay ciertas diferencias entre los seguros sociales y los individuales:

En cuanto al ámbito de protección, el seguro social va destinado a proteger a aquellas a personas económicamente débiles.

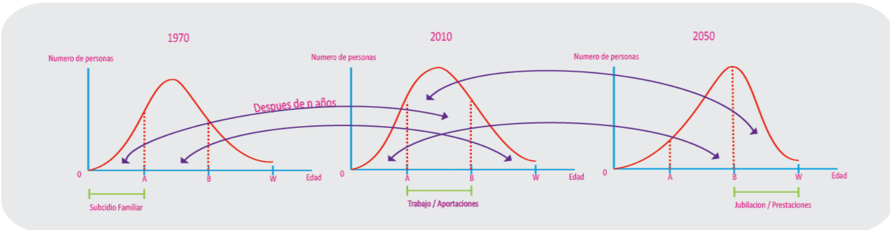
- Los seguros sociales son obligatorios.
- Las primas son pagadas en cierta proporción por el empleador.
- Los seguros sociales tratan de abarcar a toda la población.
- En los seguros sociales se pretende una mayor solidaridad.
- La administración de los seguros sociales es de carácter público.

7.1. Aspectos de naturaleza económica

Existen aspectos importantes a la hora de valorar actuarialmente los seguros sociales y colectivos. A continuación, los detallamos:

a. Aspectos demográficos

Figura 55. Distribución de la población



En la figura anterior se pueden ver tres gráficos de distribución de la población, en donde en el eje vertical tenemos el número de personas y en el eje horizontal, las edades.

El primer gráfico, corresponde a la población de 1970; el segundo gráfico, a la población del año 2010 y el tercer gráfico, a la población (proyectada) del 2050.

El eje horizontal (edad) está dividido en tres partes: entre 0-A (Edad de subsidio familiar), A-B (Edad de trabajo) en donde se generan las aportaciones del sistema y mayor que B (edad jubilación) en donde los jubilados reciben sus rentas.

A medida que avanzamos en el tiempo, la estructura de la población va cambiando, la población envejece, cada vez hay menos nacidos; mientras que, cada vez hay más personas adultas y adultos mayores.

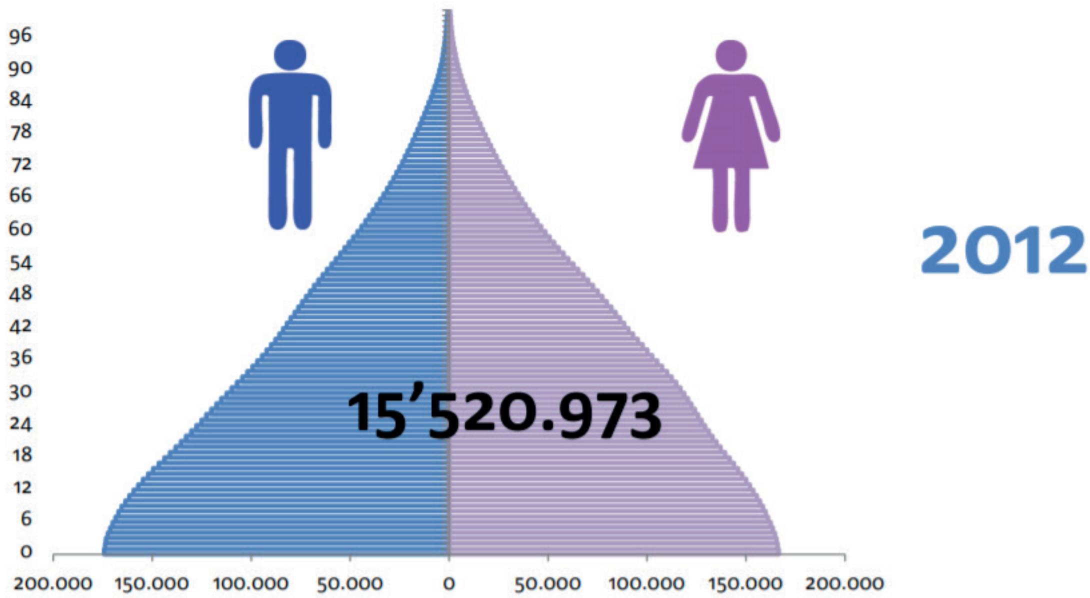
Un aspecto que habrá que tener en cuenta en el tiempo a través de un análisis demográfico dinámico son las migraciones entre grupos de edades; es decir, las personas que hace cinco años estuvieron en edad de subsidio familiar hoy estarán en edad de trabajo y en el futuro estarán en edades de jubilación.

Aquí surge la pregunta: si el sistema es solidario, ¿qué efectos tendrán en el sistema los cambios demográficos? Para responder a esa pregunta nos remitimos a la siguiente fórmula:

$\frac{Número\ aportantes}{Número\ jubilados}$ ¿Cuántos aportantes hay por cada jubilado?

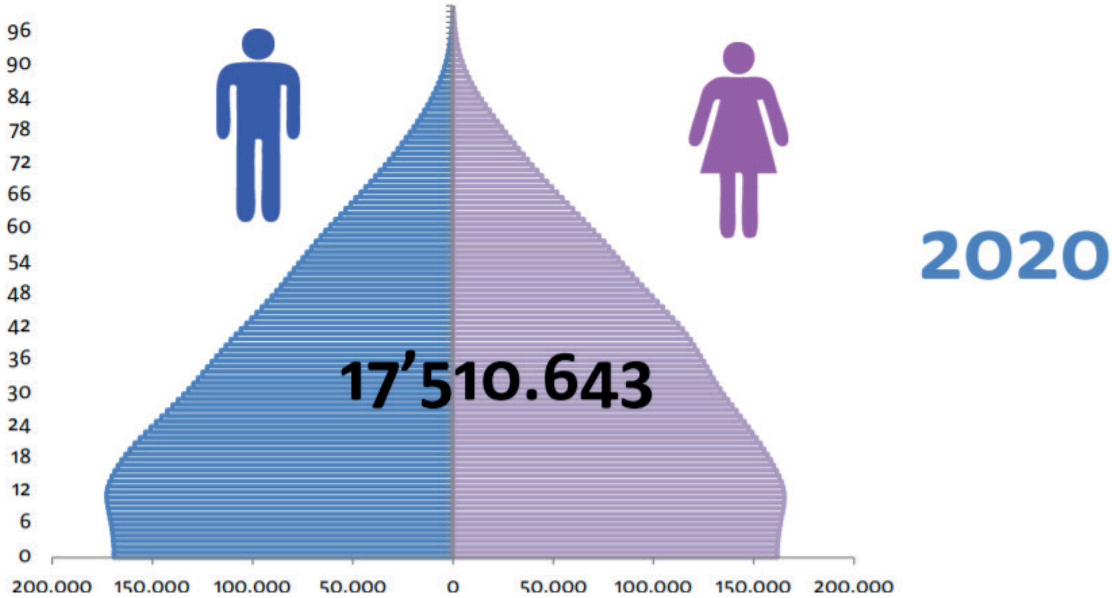
La sostenibilidad del sistema se discutirá en párrafos posteriores. Por el momento, mostraremos datos demográficos del Ecuador (pirámide poblacional), realizados por el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC):

Figura 56. Pirámide poblacional año 2012



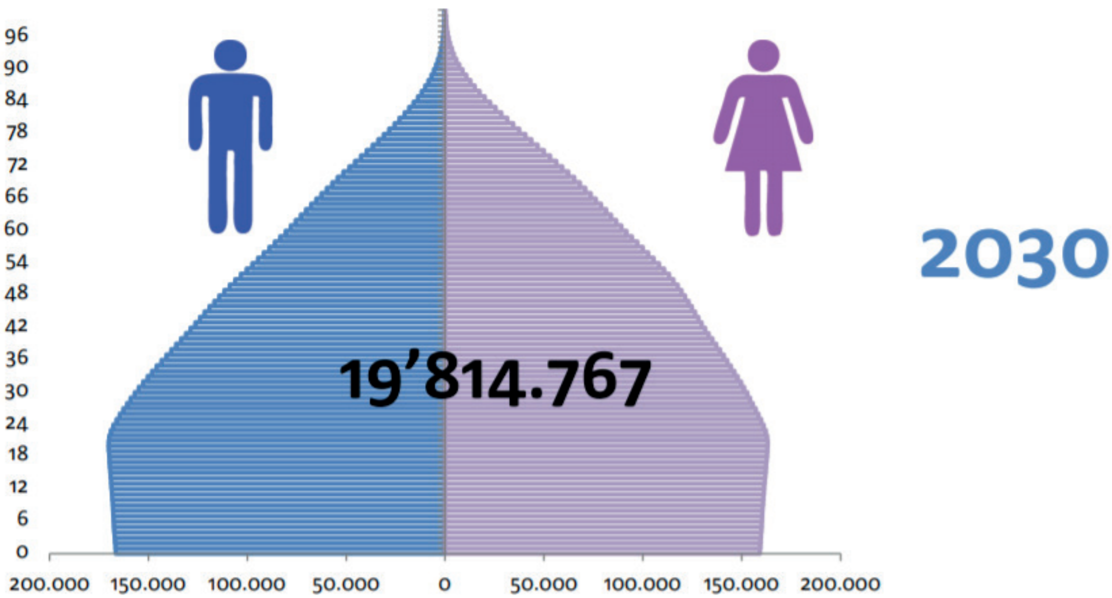
Nota. Adaptado de Estimaciones de proyecciones de población, Instituto Nacional de Estadística y Censos, (INEC, 2010) (https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_Poblacionales/presentacion.pdf)

Figura 57. Pirámide poblacional año 2020



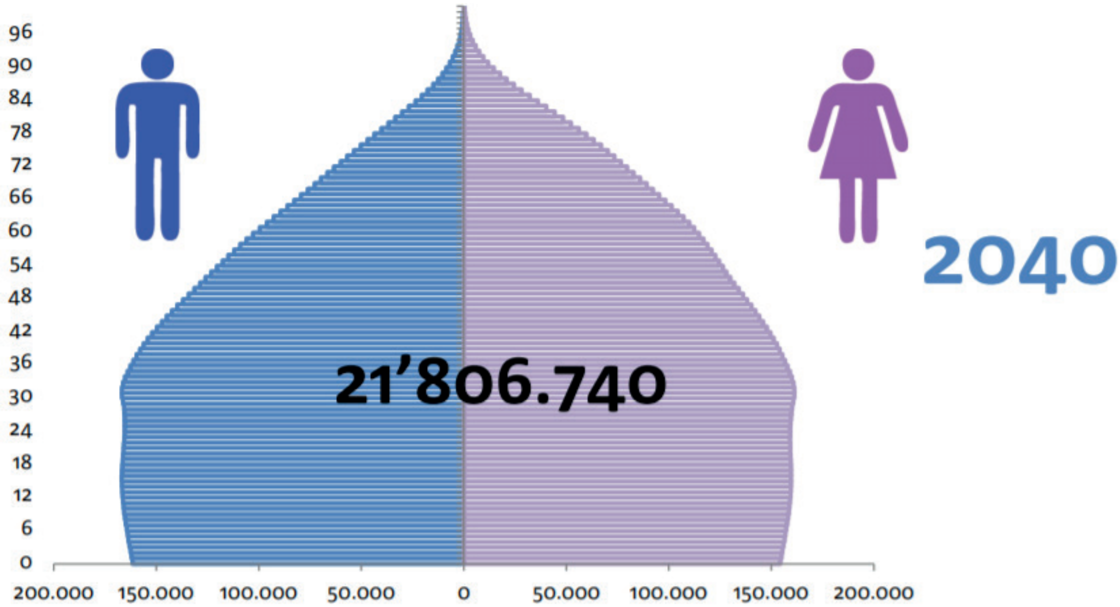
Nota. Adaptado de Estimaciones de proyecciones de población, Instituto Nacional de Estadística y Censos,(INEC, 2010) (https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_Poblacionales/presentacion.pdf)

Figura 58. Pirámide poblacional año 2030



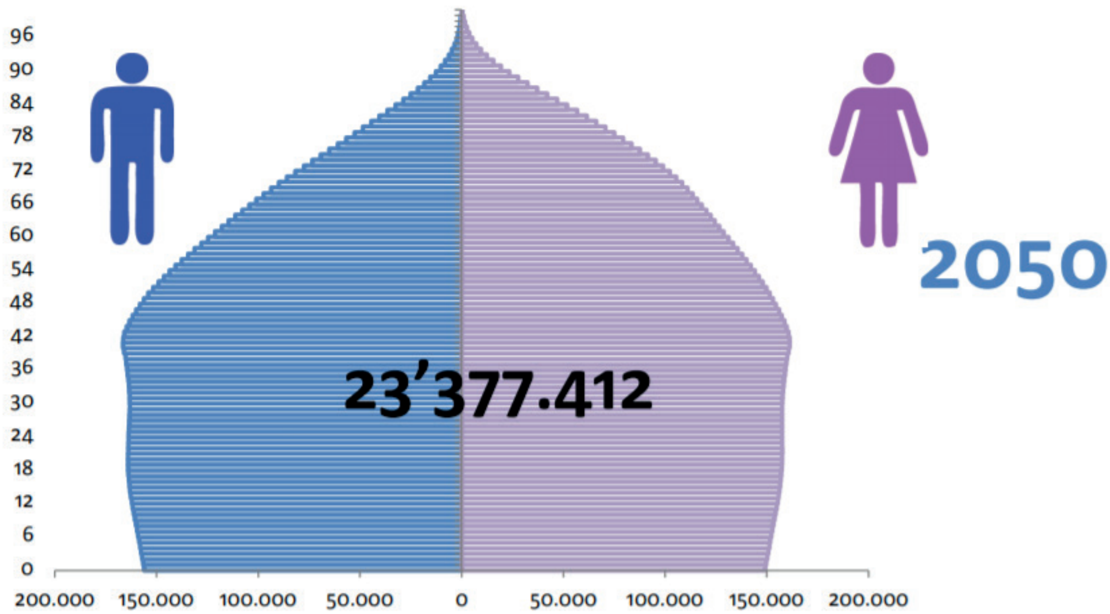
Nota. Adaptado de Estimaciones de proyecciones de población, Instituto Nacional de Estadística y Censos, (INEC, 2010) (https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_Poblacionales/presentacion.pdf)

Figura 59. Pirámide poblacional año 2040



Nota. Adaptado de Estimaciones de proyecciones de población, Instituto Nacional de Estadística y Censos, (INEC, 2010) (https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_Poblacionales/presentacion.pdf)

Figura 60. Pirámide poblacional año 2050



Nota. Adaptado de Estimaciones de proyecciones de población, Instituto Nacional de Estadística y Censos, (INEC, 2010) (https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_Poblacionales/presentacion.pdf)

Como podemos observar, pasamos de una pirámide triangular (población joven) a una pirámide más estacionaria y posterior (año 2050) a una pirámide un tanto regresiva (envejecimiento de la población).

b. PIB (Real)

Cuando hay una caída en el PIB real, hay una contracción de la economía, caen los niveles de empleo, por lo tanto, el nivel de aportaciones baja y también el nivel de producción del país, lo que afecta al empleo y al financiamiento de las aportaciones y al sistema de pensiones.

Sin lugar a dudas, los recursos de la seguridad social provienen de la renta nacional; a mayor renta, habrá generalmente una mayor propensión marginal al ahorro, por lo que los objetivos de la seguridad social estarán, en parte, cubiertos. Los países con bajo nivel de renta, normalmente, presentan problemas con el financiamiento del seguro social; en estos casos, se debería utilizar un sistema de prima escalonada.

c. Inflación

El objetivo en este caso es permitir que el ahorro de A-B sea lo suficientemente grande como para financiar el consumo pasado B.

Como vimos anteriormente, el carácter de los seguros sociales es más redistributivo y solidario, pero, el análisis del efecto redistributivo debe analizarse conjuntamente con el estudio de la financiación y la norma de prestaciones, ya que ambas pueden potenciar o contrarrestar dichos efectos redistributivos. Por ejemplo, vemos que las aportaciones patronales son fácilmente transferibles a los precios de los productos, en donde los que sostienen la carga son los consumidores; de esta manera, se aminora el efecto redistributivo de las prestaciones.

En este punto, es necesario discutir un efecto importante llamado de "doble incidencia", cuando aumenta la cuantía de las aportaciones, aumentan los precios (ya que aumentan los costos de producción o de salarios), con lo que disminuye el poder de compra de los consumidores. En el corto plazo esto contribuirá a que estos pidan aumentos salariales, contribuyendo así a una pirámide inflacionaria.

Si el Estado subvenciona a la seguridad social, su contribución al proceso redistributivo es más amplia, ya que se trata de fondos que provienen de todos los contribuyentes, aportantes o no; es decir, si la financiación al seguro social se hace con cargo a impuestos, esto es, mediante política fiscal progresiva, los efectos serán favorables para el sector laboral.

7.2. Provisión social

Para que una persona de alguna manera puede mantener su nivel de vida en edad de jubilación puede recurrir a tres tipos de ingresos:

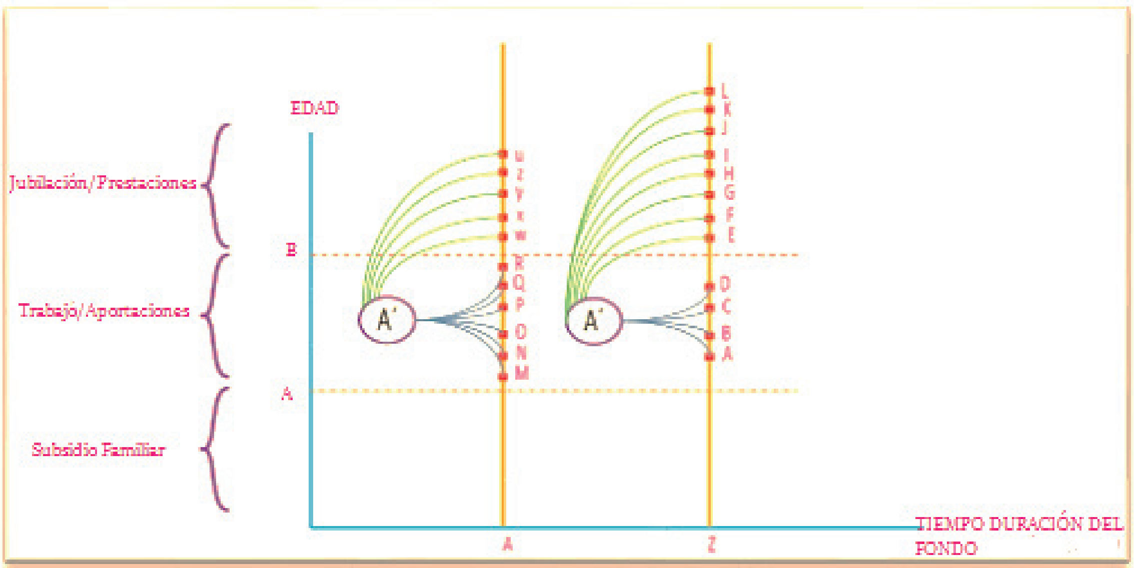
1. Pensión que se recibe de la seguridad social (salarios, años de aportaciones, coeficiente de edad)
2. Ahorro individual
3. Jubilación patronal

7.3. Tipos de sistemas

7.3.1. Sistema de reparto

Las aportaciones actuales son destinadas a los jubilados actuales "solidaridad intergeneracional"; es decir, repartir año a año todas las cargas o prestaciones que produce el grupo entre los cotizantes o aportantes. El principal riesgo de este sistema es el "demográfico", se basa en solidaridad intergeneracional.

Figura 61. Sistema de reparto



Las personas que aportan reúnen todos sus aportes en un fondo (A´), y a su vez este se reparte a las personas en edad de jubilación.

Este sistema se enfrenta al "PROBLEMA DE LA ÚLTIMA GENERACIÓN", quienes luego de n años, serán quienes aporten para los jubilados y para ellos mismo, pues, ya no existe quien les aporte; es decir, deberán generar un ahorro individual.

Este sistema se caracteriza por ser de beneficio definido: El beneficio del aportante está previamente definido por la ley de seguridad social, código del trabajo.

A continuación, demostramos cómo se forma el equilibrio financiero-actuarial en un sistema de reparto puro. Si x+ r es la edad en la que un individuo comienza a recibir las prestaciones, consideremos un grupo demográfico cuya estructura es la siguiente:

Tabla 12. Sistema de reparto

Edad	Número aportantes	Salario medio
x	lx	wx
x+1	lx+1	wx+1
x+2	lx+2	wx+2
....	....	....
....	....	....
x+r-1	lx+r-1	wx+r-1
x+r	lx+r	wx+r

Supuestos:

La estructura demográfica permanece constante.

La pensión de jubilación permanece constante (Ø wx+r)

AÑO 1

Prestaciones

$$Ø\ wx+r * lx+r \qquad (7.1)$$

Aportaciones

$$C1 * \sum_{x=h}^{x+r-1} W_h l_h \qquad (7.2)$$

Donde:

w es el Salario nominal

La equivalencia colectiva se obtiene igualando 7.2 y 7.3

$$\theta W_{x+r} * \ l_{x+r} = C1 \sum_{x=h}^{x+r-1} W_h l_h \qquad (7.3)$$

Donde C1 es la cuota de aportación para el primer año. Despejando C1 de la expresión 7.3 tenemos:

$$C1 = \frac{\theta W_{x+r} * \ l_{x+r}}{\sum_{x=h}^{x+r-1} W_h l_h} \qquad (7.4)$$

En donde la expresión 7.4 es la cuota que permite mantener el equilibrio aportaciones y prestaciones en el año 1.

AÑO 2

Prestaciones

$$\theta W_{x+r} * \ l_{x+r} + \theta W_{x+r} * \ l_{x+r+1}$$

$$\theta W_{x+r} * \ l_{x+r} + \theta W_{x+r} * \ l_{x+r} + P_{x+r}$$

$$\theta W_{x+r} * \ l_{x+r}(1 + P_{x+r}) \qquad (7.5)$$

Aportaciones

$$C2\sum_{x=h}^{x+r-1} W_h l_h \qquad (7.6)$$

Equilibrio aportaciones y prestaciones en el año dos se obtiene al igualar la expresión 7.5 y 7.6:

$$\theta W_{x+r} * \ l_{x+r}(1+P_{x+r}) = C2\sum_{x=h}^{x+r-1} W_h l_h \qquad (7.7)$$

Si despejamos C2 de la expresión 7.7, tenemos las cuotas que permite mantener el equilibrio aportaciones y prestaciones en el año 2:

$$C2 = \frac{\theta W_{x+r} * \ l_{x+r}(1+P_{x+r})}{\sum_{x=h}^{x+r-1} W_h l_h} \qquad (7.8)$$

Generalización: En un año *k* las prestaciones, aportaciones y la ecuación de equilibrio serán:

Prestaciones:

$$\theta W_{x+r} * \ l_{x+r}(1+P_{x+r}+2P_{x+r}+\cdots..+k-1P_{x+r}) \qquad (7.9)$$

Aportaciones:

$$Ck = \sum_{x=n}^{x+r-1} Wh * lh \qquad (7.10)$$

Igualando la expresión 7.9 y 7.10, y despejamos , tendremos la cuota que permite mantener el equilibrio aportaciones y prestaciones:

$$\boldsymbol{Ck} = \frac{W_{x+r} * \ l_{x+r}(1+P_{x+r}+2P_{x+r}+\cdots..+k-1P_{x+r})}{\sum_{x=n}^{x+r-1} Wh * lh} \qquad (7.11)$$

Como se observa, a medida que avanzamos en los años, los numeradores son crecientes, las fracciones anuales de los salarios destinadas a las aportaciones también son crecientes, es decir, C1<C2<C3<……Ck

Démonos cuenta que parte de la expresión que está entre paréntesis en la ecuación 7.11 es la esperanza de vida abreviada:

$$P_{x+r} + 2P_{x+r} + \cdots .. + k - 1P_{x+r} = e_{x+r} \qquad (7.12)$$

En donde es la esperanza de vida abreviada, por lo tanto, nuestra ecuación de equilibrio quedaría:

$$\boldsymbol{Ck} = \frac{\theta * W_{x+r} * \ l_{x+r}(1 + e_{x+r})}{\sum_{x=n}^{x+r-1} Wh * lh} \qquad (7.13)$$

Sin embargo, la pensión de jubilación no es constante. Supongamos que en el año k es k es $\theta(1+S)\ W_{x+r}$, entonces, la prima o cuota de dicha anualidad será C´n:

$$\boldsymbol{C^{\cdot\cdot}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{\theta(1+S)W_{x+r} * \ l_{x+r}(1 + P_{x+r} + 2P_{x+r} + \cdots .. + k - 1P_{x+r})}{\sum_{x=n}^{x+r-1} Wh * lh} \qquad (7.14)$$

$$\boldsymbol{C^{\cdot\cdot}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{\theta(1+S)W_{x+r} * \ l_{x+r}(1 + e_{x+r})}{\sum_{x=n}^{x+r-1} Wh * lh} = \boldsymbol{(1+s) * Ck} \qquad (7.15)$$

Donde Ck es la prima calculada con pensión constante. En consecuencia, en un sistema de reparto puro simple, las primas varían en la misma proporción que las prestaciones. La variación conjunta de la pensión de jubilación y de los salarios de los aportantes tiene el siguiente efecto:

$$\textit{pensión de jubilación}: \theta(1+S)W_{x+r}$$

$$\textit{salario medio anual}: Wh * (1+\alpha) \qquad (7.17)$$

La nueva prima de equilibrio C´´n será:

$$C''_{n} = \frac{\theta(1+S)W_{x+r} * \ l_{x+r}(1 + e_{x+r})}{\sum_{x=n}^{x+r-1} Wh * (1+\alpha)lh} = (1+\beta)Ck \qquad (7.18)$$

En donde:

$$\frac{(1+s)}{(1+\alpha)} = (1+\beta)$$

En donde:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{(1+s)}{(1+\alpha)} - 1$$

Ahora romperemos el supuesto inicial de estructura demográfica estable en el tiempo, ya que normalmente se produce una caída del número de aportantes; la viabilidad del sistema se basa en la existencia de una realimentación adecuada del grupo mediante la entrada de nuevos miembros, deseablemente jóvenes, que permitan financiar las prestaciones reconocidas por los pasivos.

En conclusión, un sistema de reparto simple puro tiene las siguientes características:

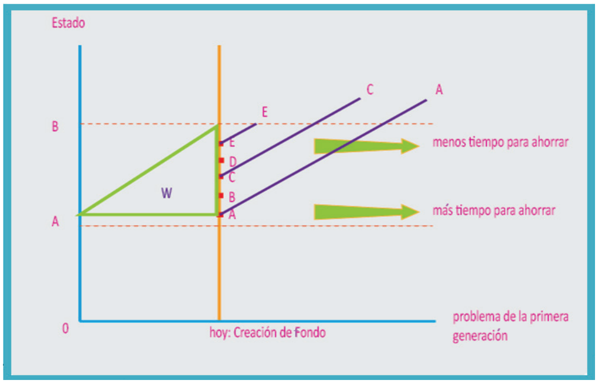
- No acumula recursos.
- Su aplicación práctica exige obligatoriedad en la afiliación.
- Sistema muy sensible a cambios demográficos.
- El sistema se basa en una transferencia de recursos intergeneracional, de aportantes a pensionistas.

7.3.2. Sistema de capitalización

"Yo ahorro para mí mismo". Después de n años se paga el fondo que se ha ahorrado, lo que sirve para mi jubilación.

Ahorro individual. El principal riesgo de este sistema es el riesgo de mercado con las tasas de interés.

Figura 62. Sistema de capitalización



Depende del capital, interés, tiempo.

- Riesgo principal en este sistema, riesgo de inversión, relacionado con las tasas de interés.

- Se hace uso de los instrumentos de renta fija, los cuales, son altamente sensibles a la tasa de interés.

- Se presenta el problema de la "PRIMERA GENERACIÓN".

Aportación definida: El riesgo lo asume el empleado/aportante. Los beneficios dependen de la inversión (de como haya resultado esta inversión).

En capitalización individual, la ecuación de equivalencia entre primas y prestaciones se establece persona por persona; mientras que, en una capitalización colectiva, la ecuación de equivalencia se establece para todos (grupo homogéneo, por ejemplo, personas de una misma categoría profesional).

Dado que el grupo está compuesto por personas cuyas edades son X1, X2, X3…….Xh.

- Las ecuaciones de equivalencia individuales serán:

$$P1 * ax1{:}xr\text{-}x1 = R1 * xr\text{-}x1Ex1 * axr$$

$$P2 * ax2{:}xr\text{-}x2 = R2 * xr\text{-}x2Ex2 * axr$$

$$P3 * ax3{:}xr\text{-}x3 = R3 * xr\text{-}x3Ex3 * axr$$

Si sumamos los tres equilibrios tendremos:

Ph * axh:xr-xh= Rh * xr-xhExh* axr (7.19)

En donde:

Rh = Renta anual de jubilación

Xr = Edad de retiro

Ph = Prima o cuota constante

- En un sistema de capitalización colectiva la ecuación quedaría:

$$P_c \sum_{i=1}^{h} a_{xi:(xr-xi)} = \sum_{i=1}^{h} xr - xi\, E_{xi} a_{xr} R_i$$

$$P_c = \frac{\sum_{i=1}^{h} xr - xi\, E_{xi} a_{xr} R_i}{\sum_{i=1}^{h} a_{xi:(xr-xi)}} \quad (7.20)$$

Bibliografía


XX01
XX02
XX03

Besley, S., & Brigham, E. (2016). *Fundamentos de Administración Financiera (Decimacuarta Edición).* Cengage Learning Editores.

Blank, L., y Tarquin, A. (2012). *Ingeniería Económica (Séptima Edición).* McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES S.A.

Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., y Nesbitt, C. (1997). *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries.

Brealey, R., Myres, S., & Allen, F. (2015). *Principios de Finanzas Corporativas (Undécima Edición).* McGraw-Hill Global Education Holdings.

Díaz, A., y Aguilera, V. (2008). *Matemáticas Financieras (Cuarta Edición).* McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES S.A.

Diz, E. (2013). *Estadística Actuarial.* Ediciones de la U.

García, J. (2008). *Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita (Quinta Edición).* Pearson Eduación de México S.A.

Gitman, L., y Zutter, Ch. (2012). *Principios de Administración Financiera (Decimodegunda Edición)*. Pearson Eduación de México S.A.

Greene, W. (1998). *Análisis Econométrico (Tercera Edición).* Prentice Hall.

Instituto Nacional de Estadística y Censos (2010). *¿Cómo crecerá la población en el Ecuador?* https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/Poblacion_y_Demografia/Proyecciones_Poblacionales/presentacion.pdf

Lind, D., Marchal, W., y Wathen, S. (2012). *Estadística Aplicada a los Negocios y la Economía (Decimoquinta Edición)*. McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES S.A.

Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística.* Alianza Editorial S.A.

Promislow, D. (2015). *Fundamentals of Actuarial Mathematics (Third Edition).* Aptara Inc.

Sandoya, F. (2007). *Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros (Segunda Edición).* ESPOL.

Superintendencia de Compañías Valores y Seguros. (1963). *Legislacion sobre el Contrato de Seguros - Decreto Supremo 1147*. https://doi.org/10.1080/01900692.2013.865649

Superintendencia de Compañías Valores y Seguros. (2020). Normas Generales para las Instituciones del Sistema de Seguros Privados. https://doi.org/10.4000/books.etnograficapress.4017

Wackerly, D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. (2010). *Estadística Matemática con Aplicaciones (Séptima Edición).* Cengage Learning Editores S.A.

Anexos


XX01
XX02
XX03

Anexo 1

Tabla 13. Tabla de Mortalidad

x	lx	dx	S(x)	F(x)	Px	qx	μ_x	e_x	e_x^0
0	100000	894	1	0	0,99106	0,00894		77,01333	77,51333
1	99106	79	0,99106	0,00894	0,99920287	0,00079713	0,00488882	76,6990192	77,1990192
2	99027	47	0,99027	0,00973	0,99952538	0,00047462	0,00063609	75,7594091	76,2594091
3	98980	37	0,9898	0,0102	0,99962619	0,00037381	0,00042431	74,7949081	75,2949081
4	98943	32	0,98943	0,01057	0,99967658	0,00032342	0,00034868	73,8225039	74,3225039
5	98911	28	0,98911	0,01089	0,99971692	0,00028308	0,0003033	72,8460636	73,3460636
6	98883	27	0,98883	0,01117	0,99972695	0,00027305	0,00027811	71,8664078	72,3664078
7	98856	26	0,98856	0,01144	0,99973699	0,00026301	0,00026807	70,8857631	71,3857631
8	98830	24	0,9883	0,0117	0,99975716	0,00024284	0,00025296	69,9041485	70,4041485
9	98806	22	0,98806	0,01194	0,99977734	0,00022266	0,00023278	68,9208854	69,4208854
10	98784	22	0,98784	0,01216	0,99977729	0,00022271	0,00022271	67,9360119	68,4360119
11	98762	23	0,98762	0,01238	0,99976712	0,00023288	0,00022782	66,9509224	67,4509224
12	98739	22	0,98739	0,01261	0,99977719	0,00022281	0,00022787	65,9662849	66,4662849
13	98717	25	0,98717	0,01283	0,99974675	0,00025325	0,00023806	64,9807632	65,4807632
14	98692	30	0,98692	0,01308	0,99969602	0,00030398	0,00027865	63,9969704	64,4969704
15	98662	39	0,98662	0,01338	0,99960471	0,00039529	0,00034969	63,0161258	63,5161258
16	98623	46	0,98623	0,01377	0,99953358	0,00046642	0,00043095	62,0406497	62,5406497
17	98577	54	0,98577	0,01423	0,9994522	0,0005478	0,00050724	61,0691338	61,5691338
18	98523	63	0,98523	0,01477	0,99936056	0,00063944	0,0005938	60,1020574	60,6020574
19	98460	67	0,9846	0,0154	0,99931952	0,00068048	0,00066018	59,1398741	59,6398741
20	98393	72	0,98393	0,01607	0,99926824	0,00073176	0,00070637	58,179464	58,679464
21	98321	76	0,98321	0,01679	0,99922702	0,00077298	0,00075265	57,2213362	57,7213362
22	98245	79	0,98245	0,01755	0,99919589	0,00080411	0,00078886	56,2648277	56,7648277
23	98166	77	0,98166	0,01834	0,99921561	0,00078439	0,00079456	55,3093026	55,8093026
24	98089	80	0,98089	0,01911	0,99918441	0,00081559	0,00080031	54,3519355	54,8519355
25	98009	82	0,98009	0,01991	0,99916334	0,00083666	0,00082646	53,3954841	53,8954841
26	97927	80	0,97927	0,02073	0,99918306	0,00081694	0,00082714	52,4393579	52,9393579
27	97847	77	0,97847	0,02153	0,99921306	0,00078694	0,00080226	51,4814149	51,9814149
28	97770	77	0,9777	0,0223	0,99921244	0,00078756	0,00078756	50,5211721	51,0211721
29	97693	80	0,97693	0,02307	0,99918111	0,00081889	0,00080355	49,5602039	50,0602039
30	97613	81	0,97613	0,02387	0,99917019	0,00082981	0,00082469	48,600002	49,100002
31	97532	82	0,97532	0,02468	0,99915925	0,00084075	0,00083563	47,6395337	48,1395337
32	97450	87	0,9745	0,0255	0,99910723	0,00089277	0,00086713	46,6787789	47,1787789
33	97363	91	0,97363	0,02637	0,99906535	0,00093465	0,00091412	45,7195957	46,2195957
34	97272	98	0,97272	0,02728	0,99899252	0,00100748	0,00097154	44,7614319	45,2614319

35	97174	106	0,97174	0,02826	0,99890917	0,00109083	0,00104971	43,8055653	44,3055653
36	97068	117	0,97068	0,02932	0,99879466	0,00120534	0,00114874	42,8523097	43,3523097
37	96951	123	0,96951	0,03049	0,99873132	0,00126868	0,00123778	41,9028169	42,4028169
38	96828	129	0,96828	0,03172	0,99866774	0,00133226	0,00130132	40,9547755	41,4547755
39	96699	137	0,96699	0,03301	0,99858323	0,00141677	0,00137546	40,0080766	40,5080766
40	96562	151	0,96562	0,03438	0,99843624	0,00156376	0,00149138	39,0634204	39,5634204
41	96411	171	0,96411	0,03589	0,99822634	0,00177366	0,00167011	38,1230358	38,6230358
42	96240	189	0,9624	0,0376	0,99803616	0,00196384	0,0018705	37,1889963	37,6889963
43	96051	185	0,96051	0,03949	0,99807394	0,00192606	0,00194684	36,2602055	36,7602055
44	95866	207	0,95866	0,04134	0,99784074	0,00215926	0,00204476	35,3282498	35,8282498
45	95659	241	0,95659	0,04341	0,99748063	0,00251937	0,00234207	34,402534	34,902534
46	95418	249	0,95418	0,04582	0,99739043	0,00260957	0,00256776	33,4868997	33,9868997
47	95169	254	0,95169	0,04831	0,99733106	0,00266894	0,00264274	32,5718984	33,0718984
48	94915	317	0,94915	0,05085	0,99666017	0,00333983	0,00300896	31,6563873	32,1563873
49	94598	356	0,94598	0,05402	0,99623671	0,00376329	0,00355791	30,7591175	31,2591175
50	94242	371	0,94242	0,05758	0,99606333	0,00393667	0,00385742	29,8715329	30,3715329
51	93871	391	0,93871	0,06129	0,99583471	0,00416529	0,00405922	28,9856399	29,4856399
52	93480	436	0,9348	0,0652	0,9953359	0,0046641	0,0044245	28,1026958	28,6026958
53	93044	478	0,93044	0,06956	0,99486265	0,00513735	0,0049128	27,2296978	27,7296978
54	92566	518	0,92566	0,07434	0,99440399	0,00559601	0,00538116	26,3651449	26,8651449
55	92048	555	0,92048	0,07952	0,99397054	0,00602946	0,00582972	25,5078872	26,0078872
56	91493	608	0,91493	0,08507	0,99335468	0,00664532	0,0063576	24,656553	25,156553
57	90885	655	0,90885	0,09115	0,99279309	0,00720691	0,00695025	23,8148099	24,3148099
58	90230	717	0,9023	0,0977	0,99205364	0,00794636	0,00760555	22,9804278	23,4804278
59	89513	783	0,89513	0,10487	0,99125267	0,00874733	0,00838196	22,1564912	22,6564912
60	88730	859	0,8873	0,1127	0,99031895	0,00968105	0,00925702	21,3431872	21,8431872
61	87871	922	0,87871	0,12129	0,98950735	0,01049265	0,01013816	20,542056	21,042056
62	86949	1008	0,86949	0,13051	0,988407	0,011593	0,01110441	19,7492783	20,2492783
63	85941	1087	0,85941	0,14059	0,98735179	0,01264821	0,0121948	18,9691882	19,4691882
64	84854	1186	0,84854	0,15146	0,98602305	0,01397695	0,01340221	18,1993778	18,6993778
65	83668	1252	0,83668	0,16332	0,9850361	0,0149639	0,01457627	17,4431802	17,9431802
66	82416	1323	0,82416	0,17584	0,98394729	0,01605271	0,01562997	16,6929722	17,1929722
67	81093	1418	0,81093	0,18907	0,9825139	0,0174861	0,01691187	15,9489968	16,4489968
68	79675	1562	0,79675	0,20325	0,98039536	0,01960464	0,01872007	15,2150486	15,7150486
69	78113	1679	0,78113	0,21887	0,9785055	0,0214945	0,02076412	14,4993023	14,9993023
70	76434	1836	0,76434	0,23566	0,97597928	0,02402072	0,0230214	13,7958369	14,2958369
71	74598	1992	0,74598	0,25402	0,97329687	0,02670313	0,02569003	13,110767	13,610767
72	72606	2151	0,72606	0,27394	0,97037435	0,02962565	0,02856974	12,443035	12,943035
73	70455	2311	0,70455	0,29545	0,96719892	0,03280108	0,03171222	11,7923923	12,2923923
74	68144	2519	0,68144	0,31856	0,96303416	0,03696584	0,03550874	11,1583999	11,6583999
75	65625	2714	0,65625	0,34375	0,95864381	0,04135619	0,03995104	10,5483276	11,0483276

76	62911	2921	0,62911	0,37089	0,95356933	0,04643067	0,04488942	9,96024543	10,4602454
77	59990	2999	0,5999	0,4001	0,95000833	0,04999167	0,04941383	9,39653276	9,89653276
78	56991	3323	0,56991	0,43009	0,94169255	0,05830745	0,05568048	8,83837799	9,33837799
79	53668	3433	0,53668	0,46332	0,93603265	0,06396735	0,06309068	8,32371245	8,82371245
80	50235	3872	0,50235	0,49765	0,92292227	0,07707773	0,0731576	7,82420623	8,32420623
81	46363	3455	0,46363	0,53637	0,92547937	0,07452063	0,07882685	7,39412894	7,89412894
82	42908	3818	0,42908	0,57092	0,91101892	0,08898108	0,08531752	6,90899133	7,40899133
83	39090	3826	0,3909	0,6091	0,90212331	0,09787669	0,09809784	6,48613456	6,98613456
84	35264	3886	0,35264	0,64736	0,88980263	0,11019737	0,10987983	6,08135776	6,58135776
85	31378	3871	0,31378	0,68622	0,87663331	0,12336669	0,12421105	5,71065715	6,21065715
86	27507	3650	0,27507	0,72493	0,8673065	0,1326935	0,13701467	5,37357763	5,87357763
87	23857	3348	0,23857	0,76143	0,85966383	0,14033617	0,14678835	5,04271283	5,54271283
88	20509	3356	0,20509	0,79491	0,83636452	0,16363548	0,16495229	4,70266712	5,20266712
89	17153	3159	0,17153	0,82847	0,81583396	0,18416604	0,19111757	4,4270973	4,9270973
90	13994	2781	0,13994	0,86006	0,80127197	0,19872803	0,21254963	4,20072888	4,70072888
91	11213	2158	0,11213	0,88787	0,80754481	0,19245519	0,21765579	3,99455989	4,49455989
92	9055	1808	0,09055	0,90945	0,80033131	0,19966869	0,21824311	3,7082275	4,2082275
93	7247	1584	0,07247	0,92753	0,7814268	0,2185732	0,23468165	3,38388299	3,88388299
94	5663	1404	0,05663	0,94337	0,75207487	0,24792513	0,2657766	3,05067985	3,55067985
95	4259	1220	0,04259	0,95741	0,71354778	0,28645222	0,31121264	2,72669641	3,22669641
96	3039	1011	0,03039	0,96961	0,66732478	0,33267522	0,37099215	2,41987496	2,91987496
97	2028	781	0,02028	0,97972	0,61489152	0,38510848	0,44539392	2,12771203	2,62771203
98	1247	552	0,01247	0,98753	0,55733761	0,44266239	0,53544676	1,8340016	2,3340016
99	695	350	0,00695	0,99305	0,49640288	0,50359712	0,64247576	1,49640288	1,99640288
100	345	345	0,00345	0,99655	0	1		1	1,5

Anexo 2

Tabla 14 . Valores de Conmutación al 4%

x	Dx	Cx	Mx	Rx	Nx	Sx
0	100000	859,6153846	6760,946771	377485,6135	2424215,384	53214974,03
1	95294,23077	73,03994083	5901,331386	370724,6667	2324215,384	50790758,65
2	91556,02811	41,78282886	5828,291445	364823,3353	2228921,153	48466543,26
3	87992,85958	31,62775507	5786,508616	358995,0439	2137365,125	46237622,11
4	84576,89107	26,30166742	5754,880861	353208,5353	2049372,266	44100256,99
5	81297,63206	22,12880672	5728,579194	347453,6544	1964795,374	42050884,72
6	78148,67125	20,51778096	5706,450387	341725,0752	1883497,742	40086089,35
7	75122,43534	18,99794533	5685,932606	336018,6248	1805349,071	38202591,6
8	72214,11296	16,86208165	5666,934661	330332,6922	1730226,636	36397242,53
9	69419,785	14,86241171	5650,072579	324665,7575	1658012,523	34667015,9
10	66734,93085	14,29078049	5635,210168	319015,685	1588592,738	33009003,37
11	64153,91196	14,36573214	5620,919387	313380,4748	1521857,807	31420410,64
12	61672,08808	13,21262989	5606,553655	307759,5554	1457703,895	29898552,83
13	59286,87206	14,43687707	5593,341025	302153,0018	1396031,807	28440848,93
14	56992,17087	16,65793508	5578,904148	296559,6607	1336744,935	27044817,13
15	54783,50637	20,82241885	5562,246213	290980,7566	1279752,764	25708072,19
16	52655,62601	23,61516931	5541,423794	285418,5104	1224969,258	24428319,43
17	50606,79446	26,65591853	5517,808625	279877,0866	1172313,632	23203350,17
18	48633,72337	29,90247272	5491,152706	274359,278	1121706,837	22031036,54
19	46733,29307	30,5779254	5461,250234	268868,1252	1073073,114	20909329,7
20	44905,2808	31,59601935	5430,672308	263406,875	1026339,821	19836256,59
21	43146,55859	32,06860939	5399,076289	257976,2027	981434,5399	18809916,77
22	41455,00696	32,05238033	5367,007679	252577,1264	938287,9813	17828482,23
23	39828,53124	30,03935352	5334,955299	247210,1187	896832,9744	16890194,25
24	38266,6253	30,00934418	5304,915946	241875,1634	857004,4431	15993361,27
25	36764,82267	29,5765171	5274,906601	236570,2475	818737,8178	15136356,83
26	35321,21451	27,74532561	5245,330084	231295,3409	781972,9952	14317619,01
27	33934,96094	25,67776529	5217,584759	226050,0108	746651,7807	13535646,02
28	32604,09237	24,69015893	5191,906993	220832,426	712716,8197	12788994,24
29	31325,39866	24,66549344	5167,216834	215640,5191	680112,7273	12076277,42
30	30095,91014	24,01328087	5142,551341	210473,3022	648787,3287	11396164,69
31	28914,36185	23,37475109	5118,53806	205330,7509	618691,4186	10747377,36
32	27778,89626	23,84619306	5095,163309	200212,2128	589777,0567	10128685,94
33	26686,63098	23,98324015	5071,317116	195117,0495	561998,1604	9538908,884
34	25636,23886	24,83471613	5047,333876	190045,7324	535311,5295	8976910,724

35	24625,39495	25,82888452	5022,49916	184998,3985	509675,2906	8441599,195
36	23652,43549	27,41273121	4996,670275	179975,8994	485049,8957	7931923,904
37	22715,3137	27,71010798	4969,257544	174979,2291	461397,4602	7446874,008
38	21813,93768	27,94405823	4941,547436	170009,9715	438682,1465	6985476,548
39	20946,99602	28,53559912	4913,603378	165068,4241	416868,2088	6546794,402
40	20112,80673	30,24196706	4885,067779	160154,8207	395921,2128	6129926,193
41	19308,99527	32,93031309	4854,825812	155269,7529	375808,406	5734004,98
42	18533,4113	34,99679023	4821,895498	150414,9271	356499,4108	5358196,574
43	17785,59099	32,93857444	4786,898708	145593,0316	337965,9995	5001697,163
44	17068,59123	35,43807125	4753,960134	140806,1329	320180,4085	4663731,164
45	16376,66888	39,67193967	4718,522063	136052,1728	303111,8172	4343550,755
46	15707,12506	39,41235628	4678,850123	131333,6507	286735,1484	4040438,938
47	15063,59251	38,65747025	4639,437767	126654,8006	271028,0233	3753703,79
48	14445,5661	46,39013502	4600,780296	122015,3628	255964,4308	3482675,766
49	13843,57726	50,09369106	4554,390161	117414,5825	241518,8647	3226711,336
50	13261,03829	50,19651951	4504,29647	112860,1924	227675,2874	2985192,471
51	12700,80184	50,8678186	4454,099951	108355,8959	214414,2491	2757517,184
52	12161,44164	54,54054916	4403,232132	103901,796	201713,4473	2543102,934
53	11639,15334	57,49466853	4348,691583	99498,56383	189552,0056	2341389,487
54	11133,99893	59,90955563	4291,196914	95149,87225	177912,8523	2151837,482
55	10645,85864	61,72000924	4231,287359	90858,67533	166778,8534	1973924,629
56	10174,68253	65,01345394	4169,56735	86627,38797	156132,9947	1807145,776
57	9718,335134	67,34535098	4104,553896	82457,82062	145958,3122	1651012,781
58	9277,207663	70,88463983	4037,208545	78353,26673	136239,9771	1505054,469
59	8849,507344	74,432294	3966,323905	74316,05818	126962,7694	1368814,492
60	8434,709383	78,51623507	3891,891611	70349,73428	118113,2621	1241851,722
61	8031,781248	81,03336699	3813,375376	66457,84267	109678,5527	1123738,46
62	7641,833218	85,18441716	3732,342009	62644,46729	101646,7714	1014059,908
63	7262,732138	88,32747773	3647,157592	58912,12528	94004,93822	912413,1362
64	6895,068809	92,66540637	3558,830114	55264,96769	86742,20608	818408,198
65	6537,208449	94,05977492	3466,164708	51706,13758	79847,13727	731665,992
66	6191,71758	95,5709958	3372,104933	48239,97287	73309,92882	651818,8547
67	5858,0036	98,49386014	3276,533937	44867,86794	67118,21124	578508,9259
68	5534,201909	104,3231322	3178,040077	41591,334	61260,20764	511390,7146
69	5217,024857	107,8243739	3073,716944	38413,29392	55726,00573	450130,507
70	4908,545681	113,3719422	2965,89257	35339,57698	50508,98087	394404,5013
71	4606,38352	118,2738965	2852,520628	32373,68441	45600,43519	343895,5204
72	4310,941027	122,8023398	2734,246732	29521,16378	40994,05167	298295,0852
73	4022,333263	126,8623749	2611,444392	26786,91705	36683,11065	257301,0335
74	3740,765763	132,9620554	2484,582017	24175,47266	32660,77738	220617,9229
75	3463,928101	137,7450676	2351,619962	21690,89064	28920,01162	187957,1455

76	3192,955029	142,549084	2213,874894	19339,27068	25456,08352	159037,1339
77	2927,599983	140,7265369	2071,32581	17125,39578	22263,12849	133581,0503
78	2674,273447	149,9327603	1930,599273	15054,06997	19335,52851	111317,9218
79	2421,484015	148,9383916	1780,666513	13123,4707	16661,25506	91982,39334
80	2179,411623	161,5231834	1631,728121	11342,80419	14239,77105	75321,13828
81	1934,064916	138,5843628	1470,204938	9711,076068	12060,35942	61081,36723
82	1721,093441	147,2545634	1331,620575	8240,87113	10126,29451	49021,00781
83	1507,642976	141,8876071	1184,366012	6909,250555	8405,201067	38894,7133
84	1307,7691	138,5699167	1042,478405	5724,884543	6897,558091	30489,51224
85	1118,900372	132,7259956	903,9084878	4682,406139	5589,78899	23591,95415
86	943,1397468	120,3351062	771,1824923	3778,497651	4470,888618	18002,16516
87	786,530035	106,1332812	650,8473861	3007,315158	3527,748872	13531,27654
88	650,1455986	102,2950819	544,7141049	2356,467772	2741,218836	10003,52767
89	522,8449167	92,58680316	442,419023	1811,753667	2091,073238	7262,308831
90	410,1486937	78,37311576	349,8322198	1369,334644	1568,228321	5171,235593
91	316,0006282	58,47688428	271,4591041	1019,502425	1158,079627	3603,007272
92	245,3698736	47,10834765	212,9822198	748,0433206	842,0789993	2444,927644
93	188,8242231	39,68453384	165,8738721	535,0611009	596,7091257	1602,848645
94	141,8772192	33,82204589	126,1893383	369,1872287	407,8849026	1006,139519
95	102,5983571	28,25916063	92,3672924	242,9978905	266,0076834	598,2546167
96	70,39310586	22,5173482	64,10813177	150,6305981	163,4093263	332,2469332
97	45,16833051	16,72567997	41,59078357	86,52246629	93,01622041	168,837607
98	26,70540706	11,36680703	24,86510361	44,93168272	47,8478899	75,82138657
99	14,31146899	6,93001404	13,49829658	20,06657912	21,14248283	27,97349667
100	6,831013839	6,568282538	6,568282538	6,568282538	6,831013839	6,831013839

Tabla 15. Valores de Conmutación al 3.88%

x	Dx	Cx	Mx	Rx	Nx	Sx
0	100000	860,6083943	7215,538852	410505,8118	2484136,553	55517722,00
1	95404,31267	73,20878672	6354,930458	403290,273	2384136,553	53033585,44
2	91767,67749	41,92779614	6281,721671	396935,3425	2288732,24	50649448,89
3	88298,1545	31,77415138	6239,793875	390653,6209	2196964,562	48360716,65
4	84968,37458	26,45393448	6208,019723	384413,827	2108666,408	46163752,09
5	81768,28479	22,28262675	6181,565789	378205,8073	2023698,033	44055085,68
6	78691,89218	20,68426901	6159,283162	372024,2415	1941929,749	42031387,65
7	75732,00362	19,17422504	6138,598893	365864,9583	1863237,856	40089457,9
8	72884,17928	17,0382024	6119,424668	359726,3594	1787505,853	38226220,04
9	70144,85945	15,03499442	6102,386466	353606,9348	1714621,673	36438714,19
10	67509,85858	14,47342551	6087,351471	347504,5483	1644476,814	34724092,52
11	64973,83865	14,56614217	6072,878046	341417,1968	1576966,955	33079615,7
12	62532,44834	13,41242938	6058,311904	335344,3188	1511993,117	31502648,75
13	60183,39961	14,67211882	6044,899474	329286,0069	1449460,668	29990655,63
14	57920,83	16,94892431	6030,227355	323241,1074	1389277,269	28541194,96
15	55740,49236	21,2106292	6013,278431	317210,88	1331356,439	27151917,69
16	53637,33034	24,08323566	5992,067802	311197,6016	1275615,947	25820561,25
17	51609,85048	27,21565698	5967,984566	305205,5338	1221978,616	24544945,31
18	49654,96616	30,5656525	5940,768909	299237,5492	1170368,766	23322966,69
19	47769,74833	31,2921918	5910,203257	293296,7803	1120713,8	22152597,93
20	45954,21833	32,37141894	5878,911065	287386,5771	1072944,051	21031884,13
21	44205,42058	32,89356094	5846,539646	281507,666	1026989,833	19958940,08
22	42521,41967	32,91489313	5813,646085	275661,1264	982784,4123	18931950,24
23	40900,29618	30,88333143	5780,731192	269847,4803	940262,9926	17949165,83
24	39341,7545	30,88811909	5749,84786	264066,7491	899362,6964	17008902,84
25	37841,4208	30,47778405	5718,959741	258316,9012	860020,9419	16109540,14
26	36397,53608	28,62381927	5688,481957	252597,9415	822179,5211	15249519,2
27	35009,43555	26,52139589	5659,858138	246909,4595	785781,9851	14427339,68
28	33675,28411	25,53080082	5633,336742	241249,6014	750772,5495	13641557,69
29	32391,95486	25,53475871	5607,805941	235616,2646	717097,2654	12890785,14
30	31156,55502	24,888278	5582,271183	230008,4587	684705,3105	12173687,88
31	29967,94482	24,25446736	5557,382905	224426,1875	653548,7555	11488982,57
32	28824,36395	24,77223556	5533,128437	218868,8046	623580,8107	10835433,81
33	27722,97897	24,94338556	5508,356202	213335,6762	594756,4467	10211853
34	26662,56044	25,8587866	5483,412816	207827,32	567033,4678	9617096,555
35	25640,83397	26,92501729	5457,55403	202343,9072	540370,9073	9050063,087
36	24656,20357	28,60909016	5430,629012	196886,3531	514730,0734	8509692,18

37	23706,66581	28,95285232	5402,019922	191455,7241	490073,8698	7994962,106
38	22792,25028	29,23102289	5373,06707	186053,7042	466367,204	7504888,237
39	21911,71071	29,88428908	5343,836047	180680,6371	443574,9537	7038521,033
40	21063,40673	31,70789184	5313,951758	175336,8011	421663,243	6594946,079
41	20244,96397	34,56643493	5282,243866	170022,8493	400599,8363	6173282,836
42	19454,23215	36,77801986	5247,677431	164740,6055	380354,8723	5772683
43	18690,82321	34,65503376	5210,899411	159492,928	360900,6401	5392328,127
44	17958,05117	37,32785224	5176,244377	154282,0286	342209,8169	5031427,487
45	17249,97593	41,83576921	5138,916525	149105,7842	324251,7658	4689217,67
46	16563,83994	41,61003893	5097,080756	143966,8677	307001,7898	4364965,905
47	15903,55741	40,86020589	5055,470717	138869,787	290437,9499	4057964,115
48	15268,68678	49,09012696	5014,610511	133814,3162	274534,3925	3767526,165
49	14649,29915	53,07047199	4965,520384	128799,7057	259265,7057	3492991,772
50	14049,06579	53,24084269	4912,449912	123834,1853	244616,4065	3233726,067
51	13471,08125	54,01517999	4859,209069	118921,7354	230567,3408	2989109,66
52	12913,91055	57,982057	4805,19389	114062,5264	217096,2595	2758542,319
53	12373,58374	61,19318878	4747,211833	109257,3325	204182,349	2541446,06
54	11850,22743	63,83707905	4686,018644	104510,1206	191808,7652	2337263,711
55	11343,77501	65,84219331	4622,181565	99824,102	179958,5378	2145454,946
56	10854,23386	69,43572024	4556,339371	95201,92043	168614,7628	1965496,408
57	10379,38394	72,00932243	4486,903651	90645,58106	157760,5289	1796881,645
58	9919,696432	75,88127843	4414,894329	86158,67741	147381,145	1639121,116
59	9473,306662	79,77104928	4339,01305	81743,78308	137461,4485	1491739,971
60	9039,700131	84,24512237	4259,242001	77404,77003	127988,1419	1354278,523
61	8617,815073	87,04635332	4174,996879	73145,52803	118948,4418	1226290,381
62	8208,886524	91,61113247	4087,950525	68970,53115	110330,6267	1107341,939
63	7810,667	95,10105238	3996,339393	64882,58062	102121,7402	997011,3124
64	7423,831369	99,88689812	3901,23834	60886,24123	94311,07316	894889,5722
65	7046,658509	101,5070545	3801,351442	56985,00289	86887,24179	800578,4991
66	6681,953197	103,2570706	3699,844388	53183,65145	79840,58328	713691,2573
67	6329,1199	106,5379279	3596,587317	49483,80706	73158,63008	633850,674
68	5986,184348	112,9736352	3490,049389	45887,21974	66829,51018	560692,0439
69	5649,622002	116,9000856	3377,075754	42397,17035	60843,32583	493862,5338
70	5321,704075	123,0565879	3260,175669	39020,0946	55193,70383	433019,2079
71	4999,877639	128,5255838	3137,119081	35759,91893	49871,99976	377825,5041
72	4684,602679	133,600696	3008,593497	32622,79985	44872,12212	327953,5043
73	4376,028375	138,1771767	2874,992801	29614,20635	40187,51944	283081,3822
74	4074,403084	144,9881791	2736,815624	26739,21355	35811,49106	242893,8628
75	3777,232733	150,3773165	2591,827445	24002,39793	31737,08798	207082,3717
76	3485,772793	155,8016681	2441,450129	21410,57048	27959,85525	175345,2837
77	3199,774759	153,9873592	2285,64846	18969,12036	24474,08245	147385,4285

78	2926,273287	164,2506155	2131,661101	16683,4719	21274,30769	122911,346
79	2652,724054	163,3497698	1967,410486	14551,81079	18348,03441	101637,0384
80	2390,292947	177,3569171	1804,060716	12584,40031	15695,31035	83289,00395
81	2123,656701	152,3452414	1626,703799	10780,33959	13305,01741	67593,69359
82	1891,991206	162,0633547	1474,358557	9153,635794	11181,3607	54288,67619
83	1659,260486	156,3370545	1312,295203	7679,277237	9289,369498	43107,31549
84	1440,948743	152,857874	1155,958148	6366,982034	7630,109012	33817,94599
85	1234,270296	146,5805169	1003,100274	5211,023886	6189,160269	26187,83698
86	1041,588809	133,0497311	856,5197573	4207,923612	4954,889973	19998,67671
87	869,6349137	117,4828964	723,4700262	3351,403854	3913,301164	15043,78673
88	719,6704668	113,365056	605,9871297	2627,933828	3043,66625	11130,48557
89	579,4251507	102,7247138	492,6220737	2021,946699	2323,995784	8086,819319
90	455,0584502	87,05512867	389,89736	1529,324625	1744,570633	5762,823535
91	351,0065292	65,02986797	302,8422313	1139,427265	1289,512183	4018,252902
92	272,8662903	52,44787745	237,8123633	836,5850336	938,5056535	2728,740719
93	210,2266415	44,23364491	185,3644859	598,7726703	665,6393632	1790,235066
94	158,1408656	37,74267843	141,130841	413,4081844	455,4127217	1124,595703
95	114,491501	31,57137515	103,3881625	272,2773435	297,271856	669,1829811
96	78,64377793	25,1856337	71,81678739	168,8891809	182,780355	371,9111251
97	50,52073704	18,72926869	46,63115368	97,07239354	104,1365771	189,1307701
98	29,90447894	12,74315375	27,901885	50,44123986	53,61584006	84,99419298
99	16,0443693	7,778107634	15,15873125	22,53935486	23,71136111	31,37835292
100	7,66699181	7,380623614	7,380623614	7,380623614	7,66699181	7,66699181

Anexo 3

Figura 63. Número de sobrevivientes a la edad x

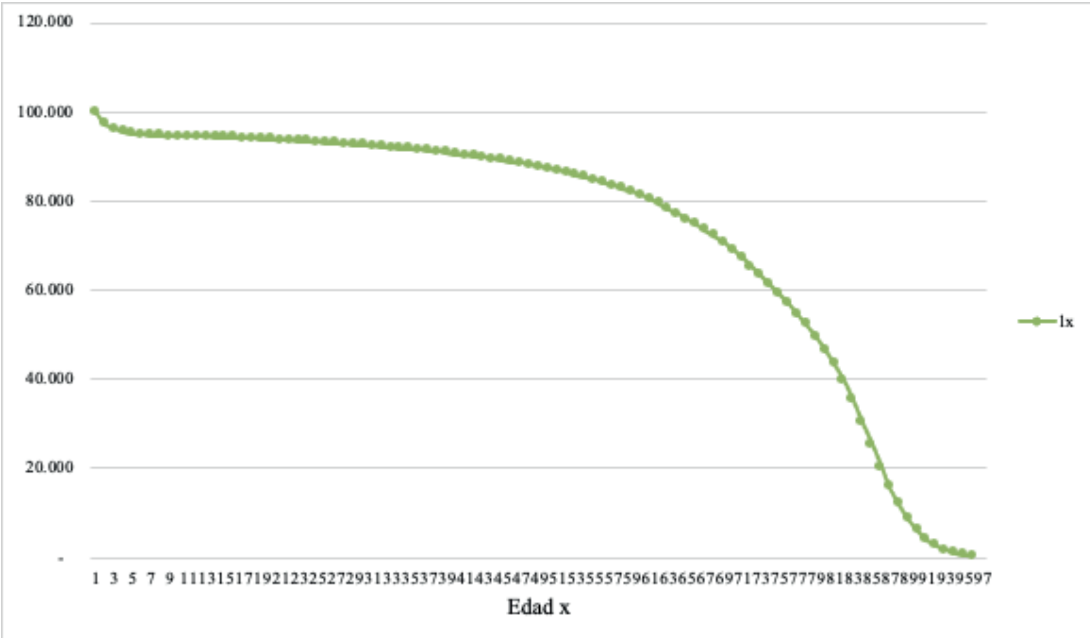


Figura 64. Número de fallecidos a la edad x

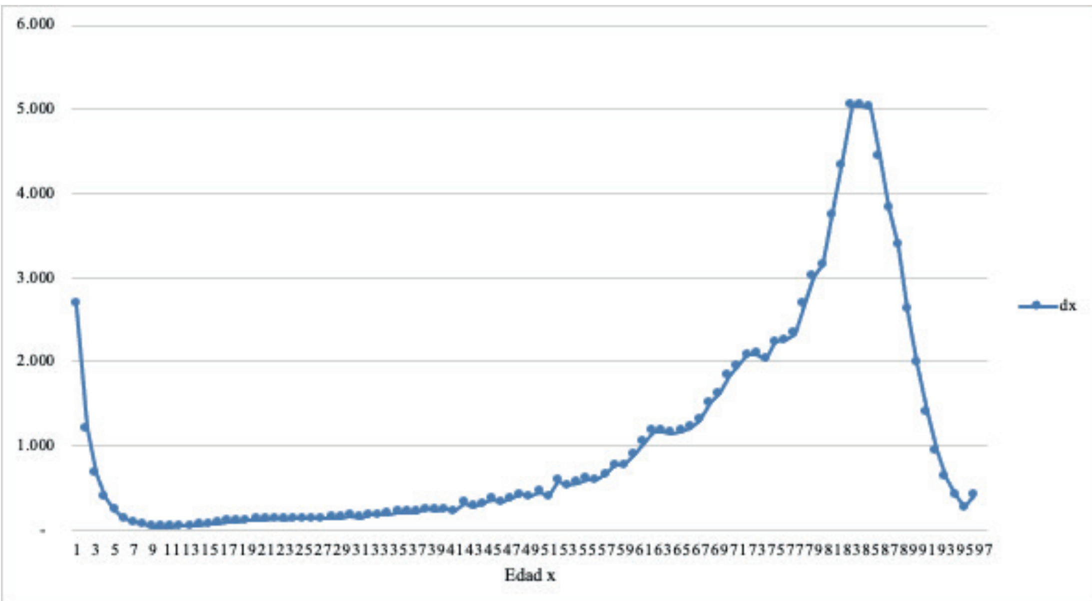


Figura 65. Tabla de la probabilidad de fallecimiento

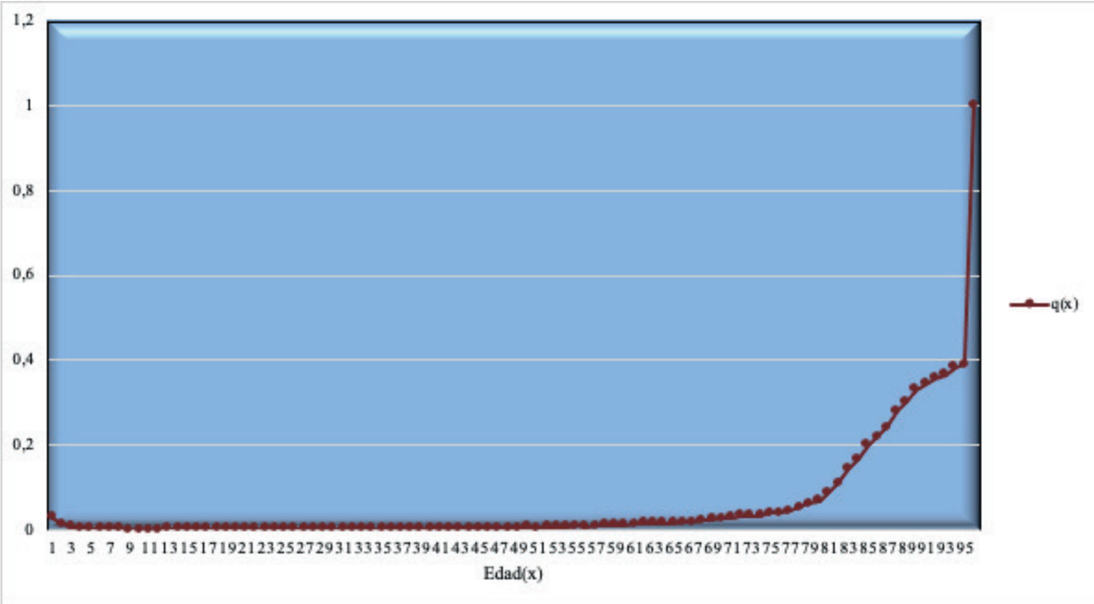
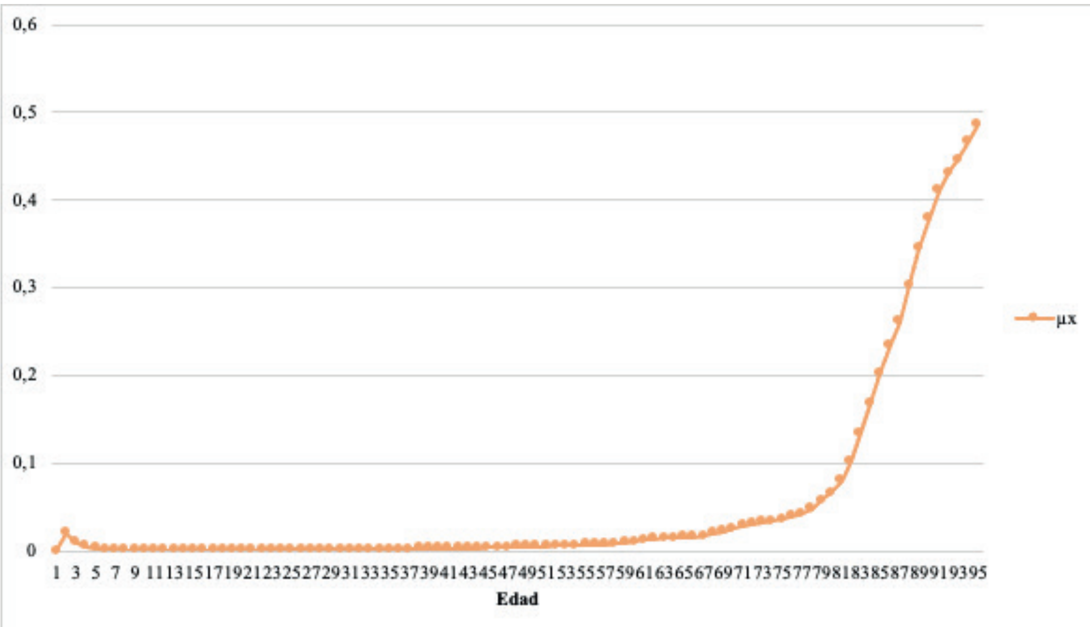


Figura 66. Fuerza de mortalidad



Anexo 4

Deducciones estadísticas

1. Experimento de Bernoulli

Cuando la muestra contiene dos posibles probabilidades: éxito y fracaso; es decir, un experimento que tenga dos posibilidades, es un experimento de Bernoulli.

Representemos como:

P (E)= Probabilidad de éxito = P

P (F)= Probabilidad de fracaso (1-P)

Definimos a la variable aleatoria X como el número de éxitos observados.

Entonces:

La probabilidad del evento X=0 será la probabilidad de fracaso

$$P\,(x=0)= P\,(F) = (1-P) \qquad (1.1)$$

La probabilidad del evento X=1 será la probabilidad de éxito

$$P(x=1) = P(E) = P \qquad (1.2)$$

Con estos conceptos la distribución de Bernoulli será:

$$f(x) = p^{x}(1-P)^{1-x}\,;\ X=0,1 \qquad (1.3)$$

En donde x toma valores de 0 o 1, por lo tanto:

$$f(0) = (1 - p) \quad (1.4)$$

$$f(1) = p \quad (1.5)$$

La media de una distribución de Bernoulli:

$$\mu = E[x] = 0 * f(0) + 1 * f(1) = f(1) = p \quad (1.6)$$

La varianza de una distribución de Bernoulli:

Para calcular la varianza es necesario calcular

$$E[x^2] = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) \quad (1.7)$$

$$= f(1) = p \quad (1.8)$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 = p - p^2 = p * (1 - p) \quad (1.9)$$

Entonces, en la distribución de Bernoulli la media es igual a P, y la varianza es igual a P (1-P).

Ejemplo

Si μ=0,7 calcular la varianza:

$$= \sigma^2 = 0{,}7 * 0{,}30 = 0{,}21$$

La función generadora de momentos de la distribución de Bernoulli será:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{0t} f(0) + e^{1t} f(1) \quad (1.10)$$

$$= f(0) + e^t f(1) \quad (1.11)$$

$$= (1 - p) + e^t p \quad (1.12)$$

2. Experimento binomial

Se repite el experimento de Bernoulli "n" veces, siendo "n" fijo tal que:

Las repeticiones son independientes entre sí.

La probabilidad de éxito se mantiene constante para todas las repeticiones.

La probabilidad de éxito se mantiene constante para todas las repeticiones.

Sea x la variable aleatoria del número de éxitos en n repeticiones.

$$\Omega = \{FFF \ldots\ldots F,\ FFF \ldots\ldots E,\ EFF \ldots\ldots F, \} \qquad (1.13)$$

Sea F = fracaso y E= Éxito

¿Cuántos elementos tiene este espacio de muestra? = 2n

$$P(X = 0) = P\{FFF \ldots\ldots F\} \qquad (1.14)$$

La probabilidad para X=0 es que todas tengan fracaso. Si la probabilidad de éxito se mantiene constante, entonces, la probabilidad de fracaso también.

Por lo tanto, la probabilidad para que salga el primer fracaso es (1-P), la probabilidad para que salga el segundo fracaso es (1-P) y así sucesivamente. Por lo tanto, para P(X=0) tendremos:

$$P(x = 0) = P\{(1-p) * (1-P) * (1-p) \ldots\ldots,, (1-P)\} \qquad (1.15)$$

Siendo así, la probabilidad de fracaso es

Ahora, ¿cuál es la probabilidad de P(X=1)?

$$\boldsymbol{p(x = 1) = np(1-p)^{n-1}} \qquad (1.16)$$

Hay “n” posibilidades de éxito y el (n-1); se debe a que para observar un éxito hay (n-1) fracaso. Es decir, el éxito puede estar en el primer experimento, en el segundo, en el tercero, hasta el “n”.

Ahora, ¿cuál es la probabilidad de P(X=2)?

¿Cuántos éxitos hay? 2; por lo tanto, tengo p2.

¿Cuántos fracasos? (1-p)n-2

¿De cuántas maneras diferentes van a estar distribuidos los dos éxitos y n fracasos?

Para responder a esta pregunta supongamos n =5

$$\Omega = \{EEFFF, EFEFF, EEFEF, EFFFE, FEEFF, \ldots \ldots \ldots \ldots .\} \qquad (1.17)$$

Se calcula mediante combinaciones:

$$\binom{n}{2} \qquad (1.18)$$

Por lo tanto:

$$p(x = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1 - p)^{n-2}\ ; x = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots . n \qquad (1.19)$$

Al generalizar tenemos la distribución binomial:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \qquad (1.20)$$

En toda función de distribución la suma de las probabilidades es 1. Probemos con la distribución binomial.

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1 = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \qquad (1.21)$$

Utilizando el criterio del binomio de Newton que dice:

$$(x+y)^n = \binom{n}{k} y^k x^{n-k} \tag{1.22}$$

Obtenemos:

$$\mathbf{[p + (1-p]^n = 1} \tag{1.23}$$

Media y varianza de una distribución binomial.

Media:

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{n} x * f(x) = \sum_{x=0}^{n} x * \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{1.24}$$

En este punto requerimos de la función generadora de momentos, en donde la derivada de la función generadora de momentos en t =0 nos dará el valor esperado. Y la segunda derivada de la función generadora de momentos en t=0 nos dará la varianza.

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{t=0}^{n} e^{tx} * f(x) \tag{1.25}$$

$$= \sum_{t=0}^{n} e^{tx} * \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{1.26}$$

Se reordena la expresión:

$$= \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x} \tag{1.27}$$

Aplicando el binomio de Newton tendremos la función generadora de momentos de una distribución binomial.

$$[pe^t + (1-p)]^n \tag{1.28}$$

Por tanto:

$$M(t) = [pe^t + (1-p)]^n \tag{1.29}$$

Con la función generadora de momentos saquemos la media:

$$M'(t) = n[pe^t + (1-p)]^{n-1} * pet \tag{1.30}$$

Si evaluamos cuando t = 0

$$M'(0) = n[pe^0 + 1 - p]^{n-1} * pe0 \tag{1.31}$$

$$n[p + 1 - p]^{n-1} \tag{1.32}$$

Por lo tanto, la media de una distribución binomial es:

$$= n * p \tag{1.33}$$

Si sacamos la segunda derivada de la función generadora de momentos y la evaluamos en t=0, tendremos la varianza.

$$M''(t) = np(np - p + 1) = (np)^2 - np^2 + np = E[x^2] \tag{1.34}$$

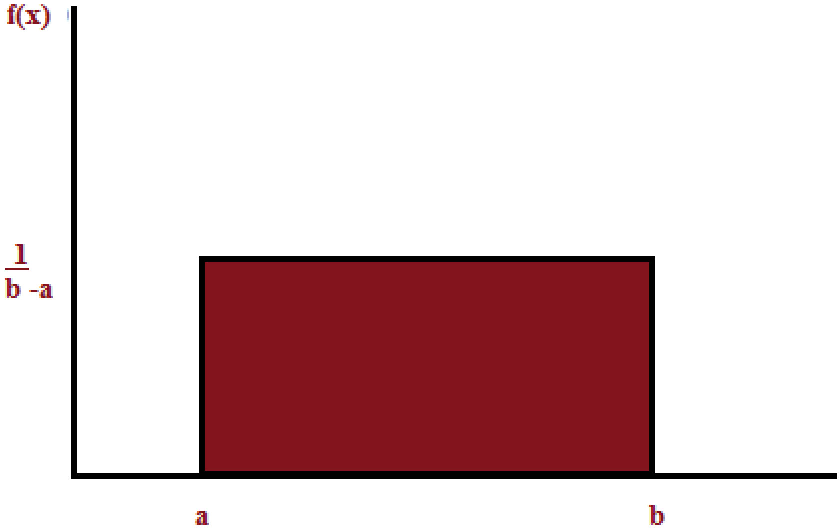
$$VAR = E[x^2] - \mu^2 \tag{1.35}$$

$$VAR = np(1-p) \tag{1.36}$$

Distribución uniforme

Tiene forma rectangular y queda definida por valores mínimos y máximos. Por ejemplo, posee un valor mínimo (a) y un máximo (b), la altura de la distribución es constante o uniforme para todos los valores entre a y b.

Figura 67. Distribución uniforme



Por lo tanto:

$$x \sim uniforme(a, b)$$

Cuando su función de densidad esté dada por:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{b-a} & si\ x \in (a,b) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{Bmatrix} \qquad (1.37)$$

Es decir, los valores que puede tomar esta variable aleatoria deben estar entre a y b.

La función de densidad es:

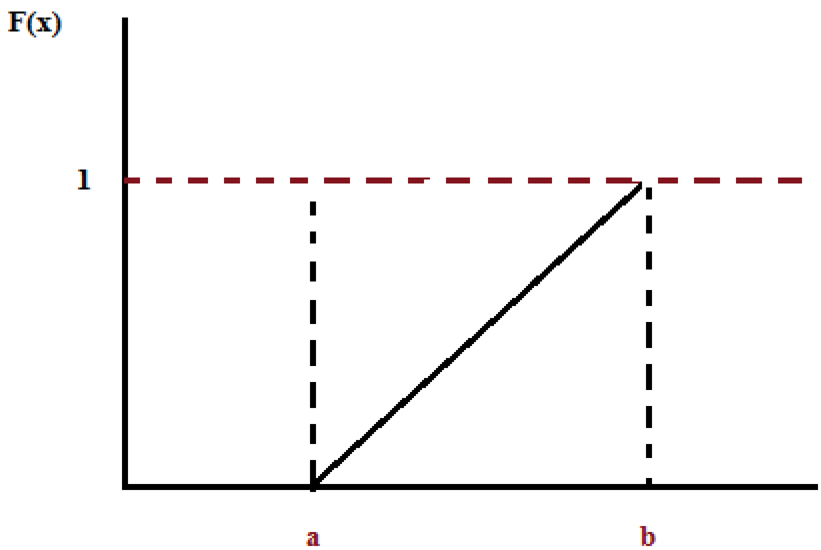
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\alpha}^{x} f(x)dx \qquad (1.38)$$

Esta integral produce los siguientes valores:

$$\begin{Bmatrix} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a < x < b \\ 1 & si\ x \geq b \end{Bmatrix} \qquad (1.39)$$

Gráficamente la función de distribución viene dada por:

Figura 68. Función de distribución



Distribución exponencial

Resulta al considerar en un proceso de Poisson la variable continua, que tomará valores en el intervalo (0, ∞), la variable aleatoria es el tiempo (t) entre la ocurrencia de dos sucesos consecutivos.

Su función de distribución es:

$$P(t > to) = P(cero\ sucesos\ en\ el\ intervalo\ 0, to) = e^{-\lambda to} \qquad (1.40)$$

Siendo la tasa media de sucesos por unidad de tiempo, entonces:

$$F(to) = P(t \leq to) = 1 - e^{-\lambda to} \qquad (1.41)$$

Cuya función de densidad será:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t};\ \lambda > 0, t > 0 \qquad (1.42)$$

Demostración de la función generatriz de momentos de una distribución normal con parámetros μ y σ^2

La función generadora de momentos de una distribución normal es:

$$M_x(t) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad (1.43)$$

Demostración:

Si la función de densidad de una variable aleatoria distribuida normalmente es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad (1.44)$$

Si:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{tx} f(x)dx \qquad (1.45)$$

Con el reemplazo:

$$M_x(t) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \qquad (1.46)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \qquad (1.47)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{xt-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)}{\sigma})^2} dx \qquad (1.48)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{\frac{2xt\sigma^2-x^2+2x\mu-\mu^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1.49)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{\frac{2xt\sigma^2-x^2+2x\mu}{2\sigma^2}} dx \qquad (1.50)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{\frac{2x(\mu+t\sigma^2)-x^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1.51)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{\frac{1}{2\sigma^2}*[2x(\mu+t\sigma^2)-x^2]} dx \qquad (1.52)$$

Si al exponente sumamos y restamos la expresión $(\mu + t\sigma^2)$, de tal manera, que no alteramos la expresión, es decir:

$$x^2 - 2x(\mu + t\sigma^2) - (\mu + t\sigma^2)^2 - (\mu + t\sigma^2)^2 \tag{1.53}$$

Queda un trinomio cuadrado perfecto, es decir:

$$= [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - (\mu + t\sigma^2)^2 \tag{1.54}$$

Por lo tanto, ahora sustituimos

$$x^2 - 2x(\mu + t\sigma^2) \text{ Por } [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - (\mu + t\sigma^2)^2 \tag{1.55}$$

Quedaría:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}*[x-(\mu+t\sigma^2)]^2-(\mu+t\sigma^2)^2} dx \tag{1.56}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{\mu^2+2\mu t\sigma^2+\sigma^4-\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx \tag{1.57}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2)}{\square}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\left[\frac{x-(\mu+t\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right]^2} dx \tag{1.58}$$

Para resolver la integral procedemos a hacer cambio de variables:

$$u = \frac{x-\mu-t\sigma^2}{\sqrt{2}\,\sigma} \tag{1.59}$$

$$x = \sqrt{2}\,\sigma\,u + \mu + t\sigma^2 \tag{1.60}$$

$$dx = \sqrt{2}\,\sigma\,du \tag{1.61}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2)}{\square}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-u^2} \sqrt{2}\,\sigma\,du \tag{1.62}$$

Al ser una función par se puede poner dos veces la integral de 0 a infinito:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{(\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2)}{\square}} 2\int_0^{+\alpha} e^{-u^2}\ du \tag{1.63}$$

Realizamos otro cambio de variable:

$$z = u^2 \tag{1.64}$$

$$u = \sqrt{z} \tag{1.65}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz \tag{1.66}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{(\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2)}{\square}} \int_0^{+\alpha} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z^2}\ dz \tag{1.67}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\left(\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)}{\square}} \sqrt{\pi} \tag{1.68}$$

$$= e^{\frac{\left(\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)}{\square}} \tag{1.69}$$

Soluciones a ejercicios propuestos


XX01
XX02
XX03

Soluciones a los ejercicios propuestos

NOTA: Las respuestas están calculadas con una tasa técnica predeterminada del 3,88%.

Capítulo 0:

Repaso de los fundamentos financieros y estadísticos

Ejercicio 1: VA= $10.000.000

Ejercicio 2: VA= $1'666.666,67

Ejercicio 3:

a) VA= $90,53

b) VA= $29,46

c) VA= $3,52

Ejercicio 4: VAN= $414.285,71

Ejercicio 5:

a) VA= $100.000,00

b) VA= $102.136,83

c) VA= $95.000,00

d) VA= $107.354,24(Mejor opción)

Ejercicio 6: VF= $1,000728101

Ejercicio 7: fa= 0,8992805755

Ejercicio 8: VA= $172,20

Ejercicio 9: VA= $1.003,28

Ejercicio 10: VAN= $-14,67

Ejercicio 11: VA= $ 40,00

Ejercicio 12: VA= $29.844,84

Ejercicio 13: VAN=25.011,34

Ejercicio 14:

VA= $54.443,71

VF= $102.379,33

Ejercicio 15: VA= $821.014,6136

Ejercicio 16: VF= $123.065,81

Ejercicio 17: VA= $45.470,51

Ejercicio 18: VF= $218.676,33; VA=147.162,90

Ejercicio 19: VF= $7.569,06

Ejercicio 20: r%= 5,38%

Capítulo 1:

Introducción a los seguros, teoría de la utilidad y decisión de aseguramiento

Ejercicio 2:

a) E[UA] = 0

b) E[UB] = 400

c) E[UC] = -400

Ejercicio 3:

a) P=10,18%

b) P=5,18%

c) P=50,10%

Ejercicio 4:

a) Probabilidad al invertir: E[UI]=3,37; Probabilidad al NO invertir: E[UNI]= 3,79

b) Invertir si p>80,374%

Ejercicio 6: P=5,556

Ejercicio 7:

Ejercicio 9: P=43,49

Ejercicio 10:

a) A=5,55

b) B=11,11

Ejercicio 11:

Riqueza 10: P=5,27

Riqueza 20: P=5,3

Capítulo 2:

Variables aleatorias relacionadas con la vida y tablas de mortalidad

Ejercicio 1:

x	Qx	Lx	Dx
0	0,70	1.000	700
1	0,30	300	90
2	0,40	210	84
3	1,00	126	126
4		0	

Ejercicio 2: ${}_{4/1}q_{60}$=0,0267

X	Qx	Px	dx	Lx
60	0,02071	0,9793	1467	70830
61	0,02276	0,9772	1579	69363
62	0,0249	0,9751	1688	67784
63	0,02712	0,9729	1793	66096
64	0,02943	0,9706	1892	64303
65	0,03189	0,96811		62411

d.

$$\boldsymbol{e_x} = \sum_{k=1}^{w-k-1} \frac{\boldsymbol{l_{x+k}}}{\boldsymbol{l_x}} = \sum_{k=1}^{w-k-1} \boldsymbol{kPx} = \boldsymbol{e_{65}} = 0.80 = \frac{l66 + l67 + l68 + \cdots \ldots}{189} = 151.2$$
$$= l66 + l67 + l68 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\boldsymbol{e_{60}} = \frac{800 + 600 + 450 + 315 + 189 + 151.2}{1000}$$

$$\boldsymbol{e_{61}} = \frac{600 + 450 + 315 + 189 + 151.2}{800}$$

$$\boldsymbol{e_{62}} = \frac{450 + 315 + 189 + 151.2}{600}$$

$$\boldsymbol{e_{63}} = \frac{315 + 189 + 151.2}{450}$$

$$\boldsymbol{e_{64}} = \frac{189 + 151.2}{315}$$

Ejercicio 5:

a) $(n/m)q_x = \frac{lx+n-lx+n+m}{x}$

b) $\frac{lx+n-lx+n+m}{lx} = \frac{lx+n-lx+n+m}{lx}$

Ejercicio 6:

$a)\ {}_{15}p_{30} = \frac{l_{45}}{l_{30}}$

$b)\ {}_{5}p_{30} = \frac{l_{35}}{l_{30}}$

c) ${}_{5/1}q_{30} = \frac{l_{35}-l_{36}}{l_{30}}$

d) ${}_{60}p_{30} = \frac{l_{90}}{l_{30}}$

Ejercicio 7:

a) ${}_{18}p_0 = 90.55\%$

b) ${}_{15}q_{35} = 12.29\%$

Ejercicio 9:

X	lx	dx	qx
70	100	10	0,10
71	90	15	0,167
72	75	20	0,267
73	55		

Ejercicio 10:

a) ${}_{n}p_x = \frac{(100-x)+n}{100-x}$

b) ${}_{n}q_x = \frac{(100-x)-(100-x)+n}{100-x}$

c) ${}_{n/k}q_x = \frac{(100-x)+n-(100-x)+n+k}{100-x}$

Ejercicio 11: $S_x = \left(\frac{100-x}{100}\right)^2$; $F_x = \frac{-x^2+200x}{10000}$; $f_x = \frac{-2x+200}{10000}$; $l_x = \left(\frac{100-x}{100}\right)^2 * l_0$

Ejercicio 12: $\mu_{25} = 0,0133$

Ejercicio 13: ${}_{10}p_{10} = 0,02$

Ejercicio 14: $F_x = 1 - e^{-\frac{x^3}{12}}$; $f_x = \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x^3}{12}}$; $\mu_x = \frac{x^2}{4}$

Ejercicio 15: $F_x = \frac{x}{100}$; $f_x = \frac{1}{100}$; $\mu_x = \frac{1}{100-x}$; ${}_{10/30}q_0 = 0.30$

Ejercicio 17: ${}_{2/2}q_{20} = 0,001994$

Ejercicio 18: ${}_{40}p_{50} = 7.02\%$

Ejercicio 19: $T_{25} = 33,60$

Ejercicio 20: $q_{26} = 0,015$ $l_{27} = 975$

Ejercicio 21: ${}_{20}q_{40} = 41,67\%$

Ejercicio 22: ${}_{2}q_{x+5} = 22.22\%$

Capítulo 3:

Valores actuariales en caso de fallecimiento

Ejercicio 1: ${}_{1}^{5}A_{45} = \$248{,}45$

Ejercicio 2: ${}_{1}^{2}A_{33} = \$148{,}58$

Ejercicio 3: ${}_{1}^{1}A_{29} = \$91{,}99$

Ejercicio 4: $A'_{28:2} = \$149{,}22$

Ejercicio 5: $A'_{45:20} = \$15.508{,}02$

Ejercicio 6: $A'_{67:3} = \$0{,}0520$

Ejercicio 7: $A_{36} = \$44.050{,}81$

Ejercicio 8: $A_{45} = \$23.832{,}69$

Ejercicio 9: ${}_{\square}^{6}A_{54} = \$30.910{,}36$

Ejercicio 10: ${}_{\square}^{9}A_{21} = \$10.102{,}42$

Ejercicio 11: $\pi = \$12.126{,}53$

Ejercicio 12: $A_{25} = \$3.022{,}52$

Ejercicio 13:

a) $A_{40} = \$50.456{,}72$

b) $A'_{40:10} = \$3.812{,}30$

c) ${}^{10}A_{40} = \$46.644{,}40$

d) ${}^{20}_{4}A_{40} = \$3.399{,}26$

Ejercicio 14: $\pi = \$\,235,68$

Ejercicio 15: $\pi = \$9\,726,13$

Ejercicio 16: $\pi = \$10.165{,}84$

Ejercicio 17: $\pi = A_x{:}\,\overline{10} * 2 + A_x{:}\,\overline{8} * 2 + A_x{:}\,\overline{7} * 1 + A_x{:}\,\overline{5} * 1 + A_x{:}\,\overline{3} * 1 + A_x{:}\,\overline{2} * 1$

Ejercicio 18: $A'_{54:4} = \$16.337{,}56$

Ejercicio 19: $\pi = \$412{,}68$

Capítulo 4:

Valor actuarial de prestaciones en caso de supervivencia $_{n}E_{x}$.

Ejercicio 1: $_{5}E_{65} = \$75.520,96$

Ejercicio 2: $\pi = \$40.957,95$

Ejercicio 3: $\ddot{a}_{36:20} = \$56.150,62$

Ejercicio 4:

$A'_{40:10} = \$953,08$

$\ddot{a}_{40:10} = \$100.865,08$

Ejercicio 5: $\ddot{a}_{65} = \$61.651,38$

Ejercicio 6:

a) $\pi = \$1.259,37$

b) $\ddot{a}_{35} = \$210.746,23$

Ejercicio 7: $^{25}\ddot{a}_{40} = \$24.750,20$

Ejercicio 8: $^{13}\ddot{a}_{38} = \$30.179,01$

Ejercicio 9:

a) ${}^{45}\ddot{a}_{20} = \$22.688,82$

b) ${}^{35}\ddot{a}_{30} = \$33.464,77$

c) ${}^{15}\ddot{a}_{50} = \$74.214,68$

Ejercicio 10: $\pi = \$7.976,18$

Ejercicio 11: $\pi = \$4.236,81$

Ejercicio 12: $\pi = \frac{A_{20} * 20.000}{1 - [{}_1^0A_{20} * (1+i) + {}_1^1A_{20} * (1+i)^2 + {}_1^2A_{20} * (1+i)^3 + {}_1^3A_{20} * (1+i)^4 + {}_1^4A_{20} * (1+i)^5]}$

Ejercicio 13: $\pi = \$11.956,15$

Ejercicio 14: $\pi = \$112.215,67$

Ejercicio 15: $\pi = \$78.294,62$

Ejercicio 16: $\pi = \$33.063,85$

Ejercicio 17: $\pi = \$49.837,57$

Ejercicio 18: $\pi = \$146.677,76$

Ejercicio 19: $\pi(total) = \$165.617,41$

Ejercicio 20: $\pi = \$15.832,84$

UNIVERSIDAD DEL AZUAY
Casa Editora

ISBN: 978-9942-847-00-3
9 789942 847003